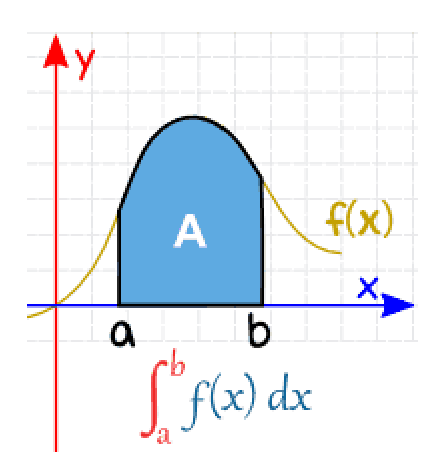
Un texto de Cálculo Integral
Teoría, métodos y aplicaciones

The value of the integral

$$\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy\,dx$$

is



Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

Canek: Portal de Matemática

Departamento de Ciencias Básicas

Fecha de aprobación:
23 septiembre 2011

PROGRAMA ANALÍTICO

Nivel LICENCIATURA		Unidad de enseñanza-aprendizaje	
Clave 111229		CALCULO INTEGRAL	
3.0 Horas teoría	3.0 Horas práctica	Seriación 111228	Créditos 9

Licenciatura en Ingeniería...	Ambiental	Civil	En Computación	Eléctrica	Electrónica	Física	Industrial	Mecánica	Metalúrgica	Química
OBLIGATORIA										
Tronco General	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Tronco Básico Profesional										
Área de Concentración										
OPTATIVA										
General										
de Área de Concentración										
Otros										
TRIMESTRE										

Observaciones

OBJETIVOS:

Al final del curso el alumno será capaz de:

- Aplicar técnicas de integración.
- Aplicar la integral para resolver problemas de interés en ingeniería.

CONTENIDO SINTÉTICO:

1. La integral
2. Técnicas de integración e integrales impropias
3. Aplicaciones de la integral

TEMA 1. La integral

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
Aplicar las propiedades de la integral y el teorema fundamental del cálculo.

CONTENIDO:
1.1 Introducción.
1.2 La integral, definida como límite de sumas de Riemann.
  1.2.1 Propiedades de la integral definida.
1.3 El teorema fundamental del cálculo.
1.4 Integral indefinida.
  1.4.1 Propiedades de la integral indefinida.

REFERENCIAS:

[1], Capítulo 5

HORAS DE CLASE: 12 horas
(4 clases teóricas y
4 clases prácticas)

Indicadores de Evaluación

1. Calcular la derivada de una función definida como una integral con límites variables, utilizando el teorema fundamental del cálculo.
2. Calcular integrales, definidas e indefinidas, que sean inmediatas.

TEMA 2. Técnicas de integración e integrales impropias

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
Calcular integrales aplicando técnicas de integración.

CONTENIDO:
2.1 Integración por cambio de variable.
2.2 Integración por partes.
2.3 Integración de potencias de funciones trigonométricas.
2.4 Integración por sustitución trigonométrica.
2.5 Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones parciales.
2.6 Integrales impropias.

REFERENCIAS:

[1], Capítulo 8

HORAS DE CLASE: 30 horas
(10 clases teóricas y
10 clases prácticas)

Indicadores de evaluación

1. Calcular integrales empleando cambios de variable.
2. Calcular integrales utilizando la fórmula de integración por partes.
3. Calcular integrales, donde el integrando sea un producto de potencias de las funciones seno y coseno, tangente y secante o bien cotangente y cosecante.
4. Calcular integrales por sustitución trigonométrica.
5. Integrar funciones racionales, mediante su descomposición en fracciones parciales.
6. Resolver integrales impropias, usando técnicas de integración.

TEMA 3. Aplicaciones de la integral definida

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
Aplicar la integral definida para resolver problemas relacionados con área, volumen, longitud de una curva y trabajo.

CONTENIDO:
3.1 Área de una región entre curvas.
3.2 Volumen de un sólido.
3.3 Longitud de arco.
3.4 Trabajo.

REFERENCIAS:

[1], Capítulo 6

HORAS DE CLASE: 24 horas
(8 clases teóricas y
8 clases prácticas)

Indicadores de evaluación

1. Calcular el área de regiones limitadas por curvas.
2. Calcular el volumen de un sólido de revolución que se obtiene al rotar una región en el plano, alrededor de uno de los ejes coordenados, o bien de una recta paralela a alguno de dichos ejes.
3. Determinar la longitud de arco de la gráfica de una función dada entre dos de sus puntos.
4. Calcular el trabajo realizado por una fuerza variable.

MODALIDADES DE CONDUCCIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Exposición en clases; tareas. Cada sesión tiene una duración de 1.5 horas. Se recomienda que en la presentación de la teoría se resalten los aspectos intuitivo y geométrico. Las horas de práctica deben consistir en la resolución de problemas por parte de los alumnos con la asistencia del profesor o ayudante. Las sesiones prácticas deben estar vinculadas a las teóricas. Acorde con las políticas generales de la UAM, se debe fomentar la participación activa de los alumnos en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Cada semana el profesor impartirá las dos clases teóricas y conducirá al menos una clase práctica.

El alumno podrá cursar esta uea en modalidad SAI.

INFORMACIÓN ADICIONAL

MODALIDADES DE EVALUACIÓN

Tres evaluaciones periódicas y/o una evaluación terminal, consistentes en la resolución de problemas. El alumno acreditará el curso si aprueba las tres evaluaciones periódicas o la evaluación terminal. En caso de que el alumno no haya acreditado una evaluación periodica, la evaluación terminal abarcará sólo la parte correspondiente a la misma. En caso de que no haya acreditado dos o tres evaluaciones periódicas, la evaluación terminal abarcará la totalidad del curso.

El curso podrá acreditarse mediante una evaluación de recuperación. No requiere inscripción previa.

Todas las evaluaciones serán departamentales.

INFORMACIÓN ADICIONAL

BIBLIOGRAFIA NECESARIA O RECOMDABLE:

1. Libro de texto: Thomas, Jr., George B. *Cálculo. Una Variable.* Decimosegunda edición. Editorial Pearson Educación. México 2010.
2. Leithold, Louis. *El Cálculo.* Séptima edición. Editorial OUP-Harla. México 1998.
3. Stewart, James. *Cálculo. Conceptos y contextos.* Editorial Thomson. México 2006.
4. Edwards, C. H. y Penney, David. *Cálculo con Trascendentes Tempranas.* Séptima edición. Editorial Pearson - Prentice Hall . México 2008.
5. Larson, Ron, Edwards, Bruce. *Cálculo 1.* Novena edición. Editorial Mc Graw -Hill. México 2010.
6. Cueto, Arturo. *Cálculo Diferencial e Integral II.* http://www.geocities.com/sogauss777.
7. Canals , I., Espinosa, E., Meda, M., Pérez, R., Ulin, C. *Cálculo Diferencial e Integral.* Problemas resueltos. *Ed.UAM - Reverté. México 2008.* En línea http://canek.azc.uam.mx

Este programa analítico fue elaborado por una comisión académica del Departamento de Ciencias Básicas integrada por los profesores Jaime Cruz, David Elizarraraz , Marisela Guzmán, Cutberto Romero y Marina Salazar

Aprobado

Jefe de Departamento

Visto bueno

Director de División

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

PROGRAMA DE ESTUDIOS

UNIDAD AZCAPOTZALCO	DIVISION CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA	1 / 2
NOMBRE DEL PLAN LICENCIATURA EN INGENIERIA AMBIENTAL		
CLAVE 1112029	UNIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE CALCULO INTEGRAL	CRED. 9
		TIPO OBL.
H.TEOR. 3.0	SERIACION 1112028	
H.PRAC. 3.0		

OBJETIVO(S):

Generales:

Al final de la UEA el alumno será capaz de:

- Aplicar técnicas de integración.
- Aplicar la integral para resolver problemas de interés en ingeniería.

CONTENIDO SINTETICO:

1. La integral.
2. Técnicas de integración e integrales impropias.
3. Aplicaciones de la integral.

MODALIDADES DE CONDUCCION DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE:

Exposición en clases; tareas. Cada sesión tiene una duración de 1.5 horas. Se recomienda que en la presentación de la teoría se resalten los aspectos intuitivo y geométrico. Las horas de práctica deben consistir en la resolución de problemas por parte de los alumnos con la asistencia del profesor o ayudante. Las sesiones prácticas deben estar vinculadas a las teóricas. Acorde con las políticas generales de la UAM, se debe fomentar la participación activa de los alumnos en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Cada semana, el profesor impartirá las dos clases teóricas y conducirá al menos una clase práctica.
El alumno podrá cursar esta UEA en modalidad SAI ó SAC.
Tareas con carácter departamental recomendadas por el respectivo grupo temático.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

APROBADO POR EL COLEGIO ACADEMICO
EN SU SESION NUM. 355

EL SECRETARIO DEL COLEGIO

MODALIDADES DE EVALUACION:

Evaluación Global:

Los criterios para la evaluación y las fechas de evaluación se darán a conocer a los alumnos al inicio del trimestre.
Tres evaluaciones periódicas o una evaluación terminal, consistentes en la resolución de problemas. El alumno acreditará el curso si aprueba las tres evaluaciones periódicas o la evaluación terminal. En caso de que el alumno no haya acreditado una evaluación periódica, la evaluación terminal abarcará sólo la parte correspondiente a la misma. En caso de que no haya acreditado dos o tres evaluaciones periódicas, la evaluación terminal abarcará la totalidad del curso.

Evaluación de Recuperación:

El curso podrá acreditarse mediante una evaluación de recuperación.
No requiere inscripción previa.
Todas las evaluaciones serán departamentales.

BIBLIOGRAFIA NECESARIA O RECOMENDABLE:

1. Libro de texto: Thomas Jr., George B. "Cálculo. Una variable". Decimosegunda edición. Pearson Educación. México 2010.
2. Canals I., Espinosa E., Meda M., Pérez R., Ulín C., "Cálculo Diferencial e Integral. Problemas Resueltos". Ed. UAM-Reverté. México 2008. En línea http://canek.azc.uam.mx.
3. Cueto Arturo, "Cálculo Diferencial e Integral II". En línea http://www.geocities.com/sogauss777.
4. Edwards C. H., Penney David, "Cálculo con Trascendentes Tempranas", Séptima edición. Editorial Pearson - Prentice Hall. México 2008.
5. Larson Ron, Edwards Bruce, "Cálculo 1", Novena edición. Editorial McGraw-Hill, México 2010.
6. Leithold Louis, "El Cálculo". Séptima edición. Editorial OUP-Harla. México 1998.
7. Stewart James, "Cálculo. Conceptos y contextos". Editorial Thomson. México 1999.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo

APROBADO POR EL COLEGIO ACADEMICO
EN SU SESION NUM. 355

EL SECRETARIO DEL COLEGIO

CAPÍTULO

1

La integral

1.1. Introducción

En este capítulo presentamos la integral, comenzando con los problemas que motivaron su introducción y desarrollo en el contexto de la física y de la matemática. El resto del capítulo está dedicado a desarrollar propiedades de la integral, a partir de las más elementales hasta culminar con el teorema Fundamental del Cálculo y algunas de sus implicaciones.
Se utiliza en la solución de las integrales un proceso de aproximación, que es una parte importante del cálculo diferencial e integral y del análisis matemático.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

CAPÍTULO

1

La integral

1.2 Problemas que dan origen a la integral

Iniciamos con la presentación de la integral mostrando los problemas que motivaron su definición. Para mayor claridad en la exposición los presentamos en varias subsecciones; en la primera introducimos algunas nociones generales y en las siguientes tratamos los problemas.

1.2.1 Conteo y medición

Desde que empezaron a surgir las primeras civilizaciones, el hombre ha tenido la necesidad de contar y medir diversos objetos para poder establecer intercambios económicos justos (o al menos equilibrados), realizar tareas de producción o elaborar obras que proporcionen alguna satisfacción estética (por ejemplo diseños artísticos, ejecuciones musicales, construcción de monumentos arquitectónicos, etcétera).
El proceso de contar está incluido en el medir y es un poco más sencillo. A pesar de esto, es de suponerse que llegar a tener claro este proceso debe haber costado varios miles de años de evolución a los primeros homínidos. La importancia de que se haya perfeccionado este proceso se puede apreciar con un simple ejemplo: imaginemos la diferencia entre ver llegar a un *homo sapiens* corriendo a su aldea gritando, "me siguen dos búfalos" (saquen las lanzas, arcos, flechas y matémoslos para comer) o, por el contrario, "me siguen cien búfalos" (¡corran a ponerse a salvo de la estampida!).
Con el tiempo, para contar y hacer operaciones se fueron refinando los sistemas numéricos dando notaciones especiales (símbolos) a los números. Dependiendo muchas veces de razones religiosas o culturales, los sistemas numéricos tuvieron diferentes bases y algunos se hicieron posicionales.
La siguiente figura muestra los sistemas numéricos de algunas culturas. Ciertos documentos históricos como el papiro de Ahmes (Egipto, siglo XIX aC) y la tablilla Plimpton 322 (Babilonia, cerca de 1800 aC) demuestran el grado de avance alcanzado en matemáticas.

Egipcio:	1	⋯		10	⋯		100	⋯		1 000	⋯				
Romano:	1	⋯	I	5	⋯	V	10	⋯	X	500	⋯	D	1 000	⋯	M
Maya:	0	⋯		1	⋯	•	5	⋯	—	19	⋯		20	⋯	

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Al avanzar en el manejo de los números y la escritura, se desarrollaron los algoritmos para realizar operaciones y la aritmética en general. Con esto surgieron los números naturales

$$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, \ldots \}$$

y los enteros

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots\, , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}\,.$$

Se puede decir que con los números naturales se tiene todo lo necesario para contar, sin embargo los números negativos y el 0 (cero) de los enteros son necesarios para que en la suma tengamos el elemento neutro aditivo y los inversos aditivos.

Por otra parte el proceso de medir es más complicado. Se puede decir que medir es lo mismo que contar cuántas veces está contenida una unidad dada o patrón en lo que se desea medir. Por ejemplo, para medir la longitud de un lado de una mesa, se considera una unidad patrón (metro, pie, pulgada, centímetro ...) y se cuenta el número de veces que se encuentra contenida en la longitud mencionada. Muy pronto podemos ver que, este proceso de contar cuántas veces cabe la unidad dada, rara vez nos dará un valor exacto; con frecuencia nos sobrará algo después de poner un número entero de la unidad patrón, por ejemplo:

u Sobrante

En esos casos, para hacer más precisa la medición tomamos subdivisiones de la unidad patrón, por ejemplo:

(Metro $\rightarrow$ decímetro $\rightarrow$ centímetro $\rightarrow$ milímetro)

y volvemos a contar con estas subdivisiones como un nuevo patrón. Este proceso puede repetirse de manera indefinida; surgen así los números racionales positivos, o fracciones positivas, y luego los números racionales, que es el conjunto:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \;\&\; n \neq 0 \right\},$$

el cual también puede ser definido como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \;\&\; q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Con la ayuda de estos números podríamos determinar cuál es la longitud de casi cualquier cosa, de manera aproximada. Podríamos decir, por ejemplo, que la longitud del lado de una mesa es $\frac{6}{5}$ m, o equivalentemente 120 cm o 1 200 mm.

Los números racionales no se representan de manera única: todo numero racional se puede escribir de una infinidad de maneras distintas, por ejemplo:

$$\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{24}{20} = \frac{120}{100} = \frac{1\,200}{1\,000} = \ldots$$

Aunado a esta propiedad está la frecuente dificultad que tiene mucha gente para operar con fracciones, pues olvidan que para sumar o restar dos números racionales deben tener el mismo denominador, por ejemplo:

$$\frac{6}{5} + \frac{3}{4} = \frac{24}{20} + \frac{15}{20} = \frac{39}{20}.$$

En la primera igualdad sustituimos las fracciones originales por fracciones equivalentes con el mismo denominador, mientras que en la segunda sólo sumamos los numeradores de las fracciones.

Para facilitar de alguna manera la escritura y operaciones con números racionales se usa la notación con punto decimal en la que, por ejemplo, 1.25 representa al número

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}.$$

Cada dígito después del punto decimal se multiplica por una potencia negativa de 10, así por ejemplo:

$$3.8374 = 3 + 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4},$$

que se podría escribir también como $\frac{38\,374}{10\,000}$ o bien como una fracción equivalente más simple; la fracción ideal se obtiene eliminando todos los factores comunes en el denominador y numerador. Es fácil operar con números en notación de punto decimal, pues los algoritmos para operaciones son prácticamente los mismos que con los números enteros, por esa razón mucha gente prefiere usar notación con punto decimal en vez de fracciones. Además es fácil convertir fracciones a decimales simplemente haciendo la división, por ejemplo $\frac{132}{8}$ se convierte así:

$$\begin{array}{r|l} & 16.5 \\ \hline 8 & 132.0 \\ & \;\;52 \\ & \;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;0 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{132}{8} = 16.5.$$

En este ejemplo la división termina al obtenerse el residuo 0. Sin embargo, es bien sabido que hay casos en los que la división nunca termina y podría prolongarse *ad infinitum*, por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & 3.333\ldots \\ \hline 3 & 10.000 \\ & \;\;10 \\ & \;\;\;\;10 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{10}{3} = 3.333\ldots$$

O también

$$\begin{array}{r|l} & 0.428571\ldots \\ \hline 7 & 3.000 \\ & 20 \\ & \;\;60 \\ & \;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots$$

Aunque estos ejemplos nos parezcan impactantes, sucede simplemente que la notación con punto decimal no puede representar todos los números racionales mediante expansiones con un numero finito de dígitos. De hecho, las fracciones representables con unos cuantos dígitos decimales son la excepción y no la regla. Más aún, ocurre que cualquier fracción al expresarse en forma decimal siempre tiene una expansión en la que uno o mas dígitos (agrupados en lo que se llama periodo) se repiten en el mismo orden hasta el infinito, como

$$\frac{132}{8} = 16.500\ldots, \quad \frac{32}{7} = 4.571428\ldots, \quad \frac{10}{3} = 3.333\ldots, \quad \frac{23}{9} = 2.555\ldots, \quad \frac{125}{999} = 0.125125125\ldots$$

Por el momento deseamos observar que una breve reflexión nos lleva a ver que una fracción tan simple como $\frac{22}{7}$ tiene al expresarse como decimal, una expansión infinita:

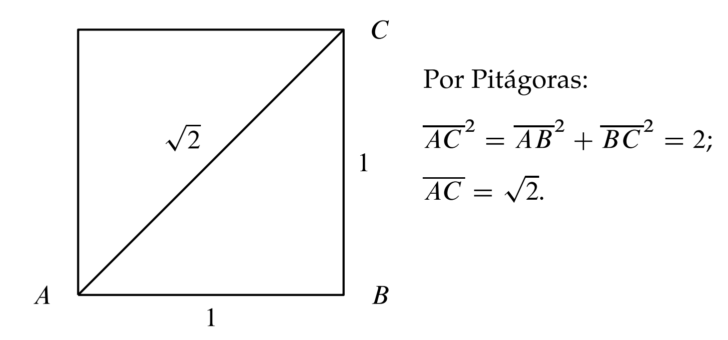
$$\frac{22}{7} = 3.142857142857\ldots$$

donde los dígitos 142857 se repiten indefinidamente. ¿Cómo interpretar este hecho? Por lo regular no nos detenemos demasiado a pensar en cosas que no podemos descifrar completamente, en lugar de eso

simplemente nos conformamos con aproximar un decimal infinito mediante uno que tenga solamente unos cuantos dígitos; lo expresamos así:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{10}{3} \approx 3.33, \quad \frac{23}{9} \approx 2.56 \quad \frac{125}{999} \approx 0.125\ldots, \text{ etc},$$

donde $\approx$ significa aproximadamente igual.
Hacemos esta clase de aproximaciones basándonos en razones puramente prácticas: si en la solución de un problema el resultado fuese una longitud de $\frac{23}{9} = 2.555\ldots$, y quisiéramos marcar un segmento de línea de esa longitud usando una regla graduada, no tendríamos ningún problema, pues $2.555\ldots$ son 2 unidades, 5 decímetros, 5 centímetros, 5 milímetros, pero sería muy difícil ir más allá en exactitud (bien sabemos que la punta del más fino marcador o lápiz es mayor que 0.0005).
Sin embargo, si la longitud $\frac{23}{9}$ cm fuese necesario medirla con mayor precisión (si fuera parte de un aparato o mecanismo de alta precisión), seguramente haríamos un esfuerzo mayor para obtener esa precisión.
Otra problema que enfrentamos con los números racionales es que con ellos no es posible representar cualquier longitud.
Por ejemplo, si se tiene una mesa cuadrada de lado 1 m, entonces su diagonal mide $\sqrt{2}$.



Desde el siglo III aC los matemáticos griegos de la escuela pitagórica descubrieron el número $\sqrt{2}$; este es la longitud de la diagonal anterior y no puede representarse como un número racional (cociente de dos enteros); lo mismo sucede con muchos otros más. Hoy en día sabemos que los números no expresables como cociente de enteros, llamados irracionales, son una infinidad mayor que la infinidad de números racionales. Si vemos la expansión decimal de un número racional A y otro irracional B, hay una forma de distinguirlos: ambas serían infinitas, pero en la expansión decimal de A debe haber un periodo (grupo de dígitos) que se repite hasta el infinito y en el irracional B nunca veríamos un periodo, lo cual no es fácil de afirmar.

Ejemplos:

1. $A = 35.783425783425783425\ldots$ es racional, ya que se repite el periodo $\widehat{783425}$.
2. $B = 2.10111213141516171819110111\ldots$ es irracional (sin periodo).
3. $\sqrt{2} = 1.4142135623731\ldots$ es irracional (sin periodo).
4. $\pi = 3.1415926535897931\ldots$ es irracional (sin periodo).
5. $\frac{58}{13} = 4.4615384646153846\ldots$ es racional, con periodo $\widehat{46153846}$.

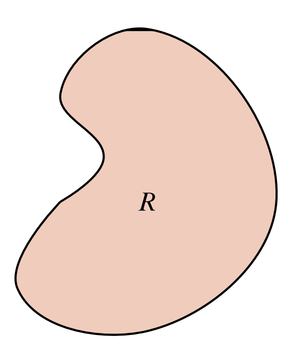
Finalmente, al considerar todos los números que pueden expresarse como una expansión decimal infinita (con o sin periodo) obtenemos los números reales:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0.a_1a_2a_3\ldots \,\middle|\, a_0 \text{ es un entero } \& \, a_i \text{ son dígitos para } i = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

Cada número real tiene, como dice la definición anterior, una expansión decimal infinita; se puede pensar en aproximarlo mediante números con una sucesión finita de dígitos después del punto, digamos 8 o 16 dígitos. En ese caso estaremos manejando aproximaciones del valor exacto del número; mientras esto produzca números razonablemente válidos, obtendremos lo que necesitamos de nuestros cálculos, de lo contrario tendremos que aumentar la precisión según se necesite.
Es común afirmar en matemática que "podemos aproximar un valor tanto como se quiera", refiriéndonos a lo que sucede, en lo expresado anteriormente. Con mucha frecuencia en este texto estaremos analizando el tema de la aproximación y cómo mejorarla usando métodos matemáticos.

1.2.2 Medición de áreas

Lo explicado anteriormente sobre medición de longitudes podría parecer suficiente para medir cualquier clase de magnitud, pero es preferible dedicar algo de atención a las áreas, como lo haremos después con otras cantidades como volúmenes, longitud de curvas y otras más.
La medición de áreas ha sido importante desde la antigüedad, pues tuvo aplicación directa en la agricultura (área de terrenos, para determinar su valor o estimar la cosecha) y el comercio (las telas, producto de trabajo artesanal, tenían valor proporcional a su área; lo mismo las pieles curtidas de animales). ¿Qué es el área? ¿Cómo medir las áreas?
Para comenzar podemos decir que el área es una medida de la extensión de una región plana cerrada. Si R es una región, denotaremos su área por $A(R)$ y observamos que debe cumplir las siguientes propiedades:



1. Positividad: $A(R) \geq 0$.
2. Aditividad: si R es la unión de dos o más regiones que no se traslapan, es decir:

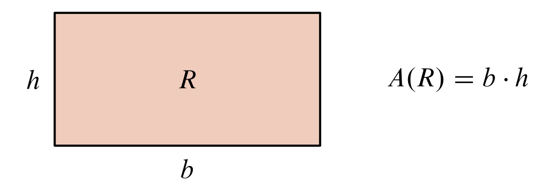
$$R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n,$$

   entonces:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + \ldots + A(R_n).$$

3. Normalización: el área de un rectángulo R cuya base tiene longitud b, altura h, es

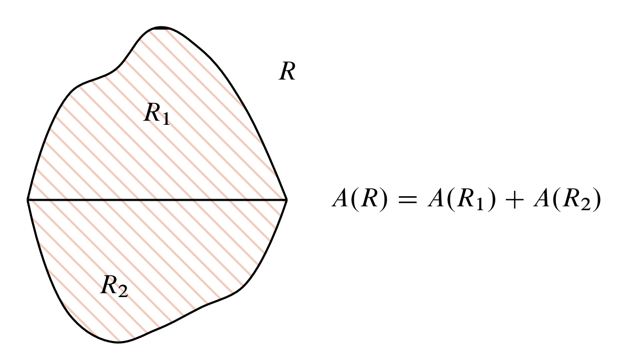
$$A(R) = b \cdot h \quad \text{(unidades cuadradas).}$$



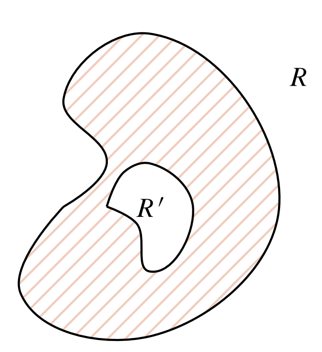
Es oportuno hacer algunos comentarios sobre estas propiedades:

1. Sobre la positividad, podemos decir que es lo que se espera de la medida de la extensión de una región: a los conjuntos muy pequeños como un punto, una línea (recta o curva) o colección finita de estos se les asigna un valor de área 0, lo que va de acuerdo con nuestra experiencia; por otro lado, como medida del tamaño o extensión de una región, es de esperarse que su valor sea positivo cuando no sea cero. Más adelante se podrá hablar de áreas con valor negativo, pero sólo como una convención para cumplir ciertos requisitos de orientación o signo.

2. La aditividad proviene del sentido común: una región R al seccionarse en partes tiene la misma área que la suma de las áreas de sus partes.



De aquí se desprende otra importante propiedad, llamada monotonía del área: Si R' es una región contenida en R, entonces $A(R') \leq A(R)$. Dicho de otra forma, regiones más grandes deben tener un área más grande.



Esto es así porque, como se muestra en la figura anterior, R sería entonces la unión de R' con su complemento en R, que es $R - R'$. Por consiguiente, $R = R' \cup (R - R')$ y, como esas regiones no se traslapan, entonces:

$$A(R) = A(R') + A(R - R'),$$

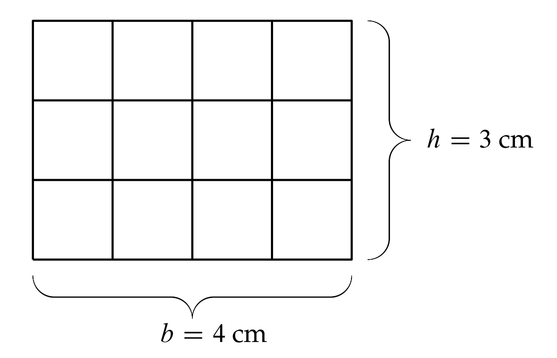
pero como $A(R - R') \geq 0$, al omitir este sumando en el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos:

$$A(R) \geq A(R') \quad \text{o bien} \quad A(R') \leq A(R).$$

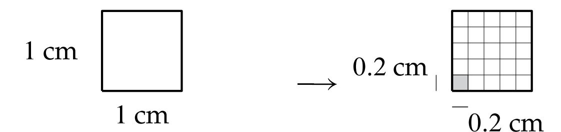
3. La normalización que utilizamos merece la pena comentarse. ¿Porqué definir el área de un rectángulo como se hace?

   La respuesta puede dejarnos ver algo sobre la consistencia de la matemática pues, como se dijo antes, medir es contar cuántas veces está contenida una unidad patrón en lo que se desea medir. Para medir áreas se utiliza como patrón un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud, y su área sea una "unidad cuadrada"; así por ejemplo, un rectángulo que tenga por base 4 cm y altura 3 cm,

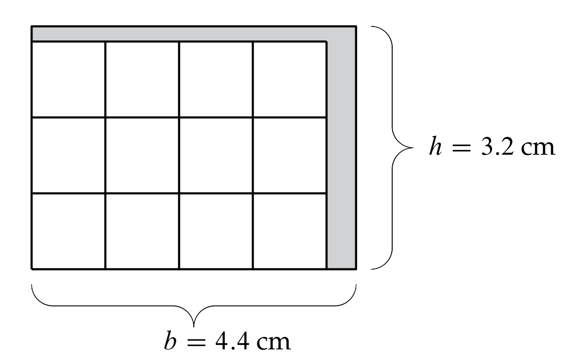
tendrá exactamente 12 cm^2 de área, como se puede ver contando los cuadrados unitarios de la figura siguiente:



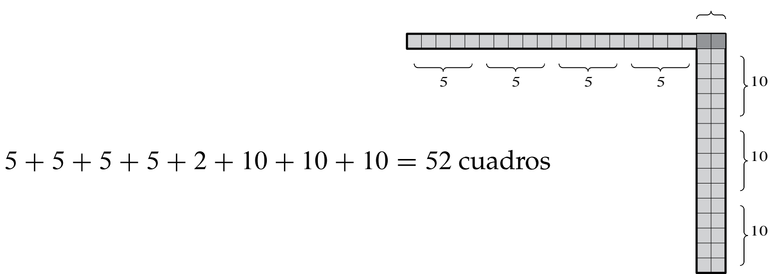
Si la base y la altura de un rectángulo tienen longitudes que son múltiplos enteros de la unidad, vemos que su área será $A(R) = b \cdot h$. Para el caso de longitudes fraccionarias, se tendrá que dividir el cuadrado unitario que sirve de patrón y utilizar proporcionalidad para obtener el área correspondiente. Así, por ejemplo, para un rectángulo que tuviera base $b = 4.4$ cm y altura $h = 3.2$ cm, podríamos dividir cada lado del cuadrado unitario que usamos en la figura anterior en cinco partes iguales:



Ya hemos visto cuántas veces cabe el cuadrado unitario (de 1 cm de lado) en el rectángulo original; necesitamos ver ahora cuántas veces cabe el cuadrado de 0.2 cm de lado, en la región no cubierta anteriormente, como sigue:



El área del rectángulo R será la suma del área del rectángulo sin sombrear más el área de la parte sombreada (es decir, 12 cm^2 más el área de la parte sombreada). Para esta última podemos contar los cuadrados de 0.2 cm de lado como se ve en esta figura:



Así, el borde sombreado contiene 52 cuadros de 0.2 cm de lado; el área de cada uno de estos cuadritos es $\dfrac{1}{25} = 0.04$ del cm^2 que teníamos originalmente, de modo que la región sombreada tiene un área de $\dfrac{52}{25} = 2.08$ cm^2, y el área total del rectángulo es entonces:

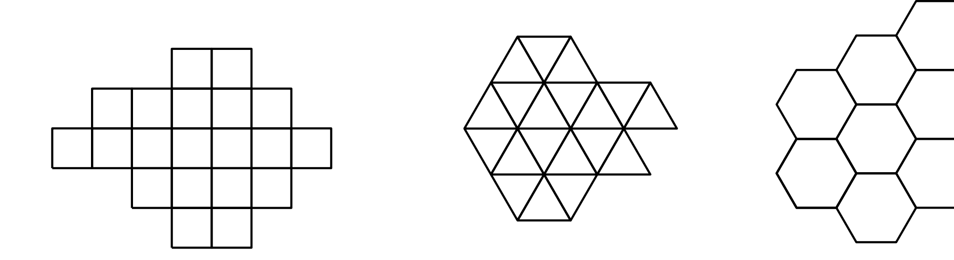
$$A(R) = 12 + 2.08 = 14.08 \text{ cm}^2.$$

Desde luego, el mismo resultado se obtiene cuando simplemente se multiplican la base por la altura: $A(R) = (4.4)(3.2) = 14.08$ cm^2.

El argumento anterior se presentó para que el lector pueda apreciar la concordancia entre las ideas básicas del área de una región y lo que hacemos comúnmente para calcular áreas.

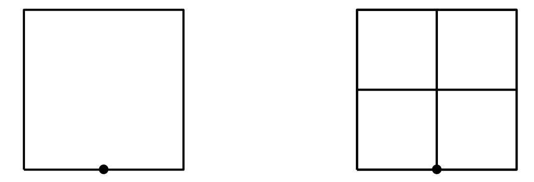
- ¿Porqué se utilizan unidades cuadradas? ¿Podrían emplearse unidades que no sean cuadradas?

  Considerando polígonos regulares, además de utilizar cuadrados, podríamos utilizar otros dos tipos de figuras, a saber, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, pues con cada una de estas tres figuras (del mismo tipo y tamaño) es posible cubrir el plano. Sin embargo por su facilidad o por tradición y costumbre, se utilizan como patrón los cuadrados y en tres dimensiones los cubos, en vez de triángulos y tetrahedros, respectivamente.



Con relación a los polígonos regulares mencionados (cuadrados, triángulos y hexágonos regulares), es importante lo siguiente:

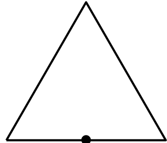
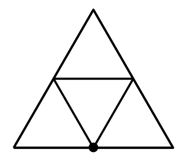
⋆ En un cuadrado se pueden inscribir cuatro cuadrados de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado original.



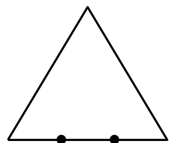
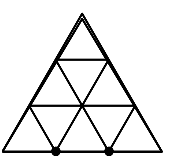
⋆ Se pueden inscribir nueve cuadrados de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la tercera parte de la longitud del lado del cuadrado original.



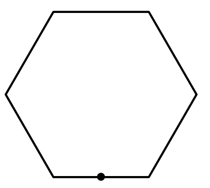
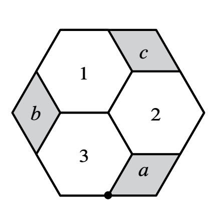
⋆ En un triángulo equilátero se pueden inscribir cuatro triángulos de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del triángulo original.

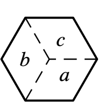
★ En un triángulo equilátero se pueden inscribir nueve triángulos de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la tercera parte de la longitud del lado del triángulo original.

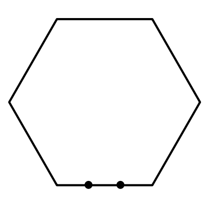
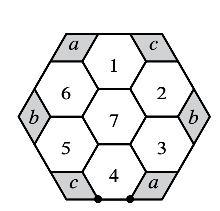
★ En un hexágono se pueden inscribir cuatro hexágonos de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del hexágono original. De los cuatro hexágonos inscritos, uno está en partes.

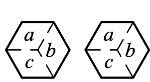
El cuarto hexágono es



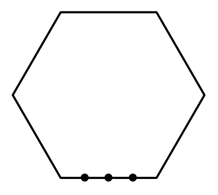
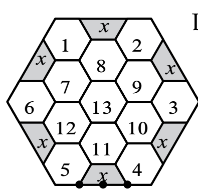
★ Se pueden inscribir nueve hexágonos regulares de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la tercera parte de la longitud del lado del hexágono original. De los nueve hexágonos inscritos, dos están en partes.

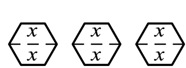
Los hexágonos 8 y 9 se forman así:



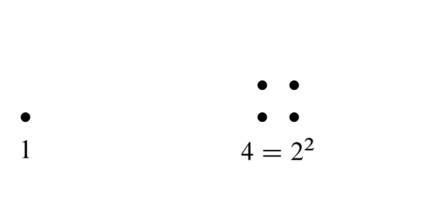
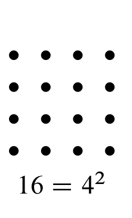
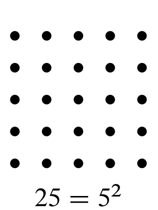
★ También se pueden inscribir 16 hexágonos regulares de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la cuarta parte de la longitud del lado del hexágono regular. De los 16 hexágonos inscritos, tres están en partes.

Los hexágonos 14, 15 y 16 se forman así:



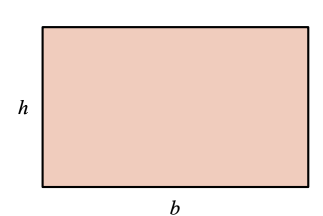
De lo anterior se puede apreciar que si se dividen los lados de las figuras originales en n partes, se forman n^2 figuras semejantes de menor tamaño. Los matemáticos de la escuela Pitagórica descubrieron que si colocamos puntos, de manera que su arreglo regular forme un cuadrado, obtenemos al contarlos, precisamente los *números cuadrados*.

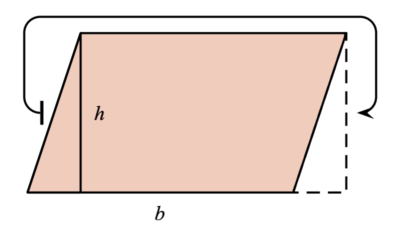




1 $\quad 4 = 2^2 \quad 9 = 3^2 \quad 16 = 4^2 \quad 25 = 5^2$

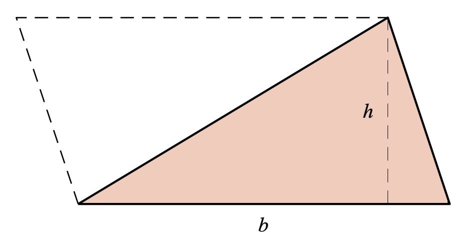
- Volviendo a nuestra discusión principal, podemos calcular el área de un rectángulo o de cualquier paralelogramo como el producto de la longitud de su base por su altura y la de un triángulo como la mitad de este producto.

  Un rectángulo y un paralelogramo, ambos con igual base y altura tienen la misma área:

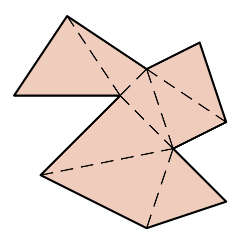




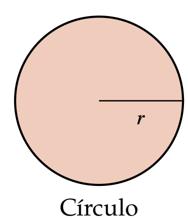
  El área de un triángulo mide la mitad del área de un paralelogramo con la misma base y altura:



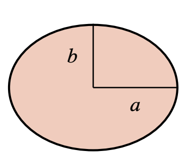
- Utilizando las propiedades enunciadas antes (positividad, aditividad y normalización) podemos calcular el área de cualquier polígono; la forma más simple de hacerlo es mediante triangulación, que consiste en subdividir el polígono en triángulos, de modo que la suma de las áreas de los triángulos sea igual al área del polígono:



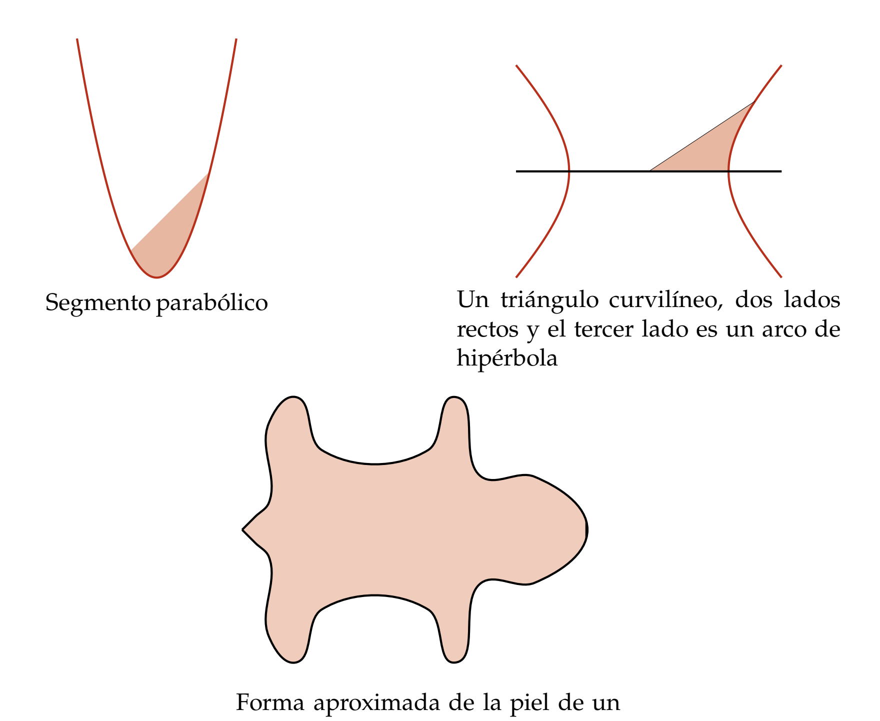
La triangulación es el método empleado comúnmente en topografía para el cálculo de áreas de terrenos con frontera poligonal. Si todas las figuras planas fueran poligonales (es decir, con una frontera compuesta de un número finito de segmentos rectilíneos), el problema del cálculo de áreas habría quedado resuelto desde hace dos mil años. Pero no es así, el problema empieza a complicarse justamente cuando deseamos conocer el valor del área de un círculo, una elipse, una región con un segmento parabólico o el valor del área de figuras con contornos curvos.



Círculo



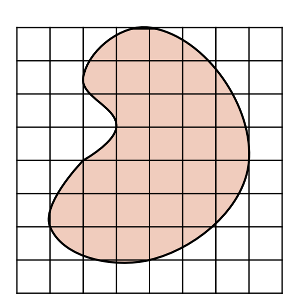
Elipse

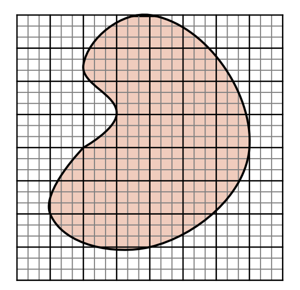

Segmento parabólico

Un triángulo curvilíneo, dos lados rectos y el tercer lado es un arco de hipérbola

Forma aproximada de la piel de un animal

Con las ideas presentadas hasta el momento, la única forma que tenemos para calcular el área de figuras es mediante aproximaciones sucesivas, lo cual consiste en tomar la unidad patrón y acomodar tantas copias como sea posible, sin traslaparse, dentro de la región cuya área se desea calcular; a continuación tomar divisiones de la unidad patrón y colocar tantas de ellas como sea posible sin traslaparse en las partes que no han sido cubiertas de la región; continuar este proceso hasta tener una aproximación suficientemente satisfactoria del valor del área. La figura siguiente ilustra las primeras etapas de este proceso para aproximar el valor del área de una región cerrada cualquiera, como se hacía por ejemplo en la educación básica, con cuadrículas que se hacen cada vez más finas.





En las secciones 1.3 y siguientes, veremos cómo hacer el cálculo del área de una región de manera sistemática y así obtener resultados más precisos.

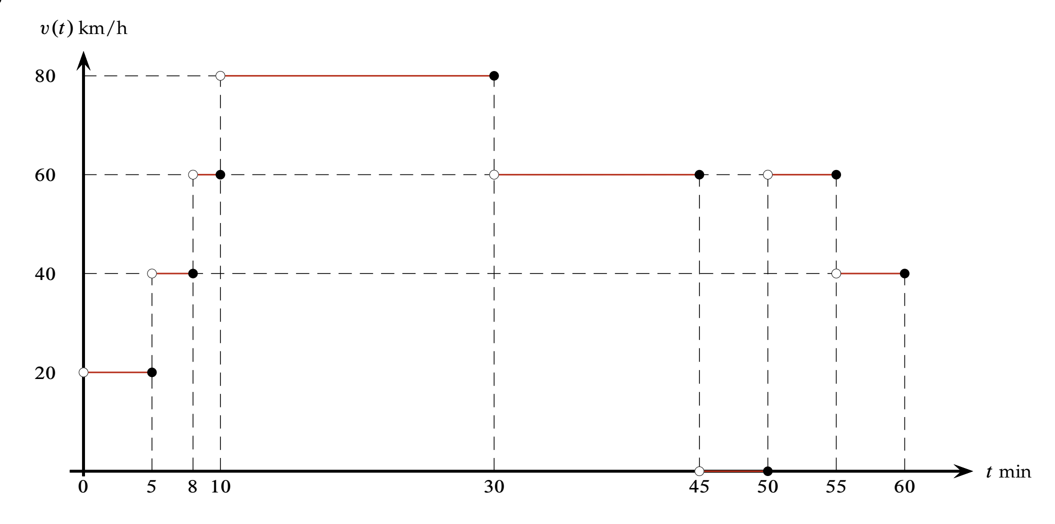
1.2.3 Medición de la distancia recorrida por un móvil

En esta subsección presentamos un problema que al parecer estaba presente en las investigaciones de Newton y lo condujeron a descubrir el teorema Fundamental del Cálculo.
Si un móvil viaja de tal manera que se conoce su velocidad instantánea $v(t)$ en cada instante t de un intervalo, ¿es posible determinar la distancia $s(t)$ que ha recorrido para cada instante t? En este caso suponemos que el movimiento ocurre en una sola dimensión; incluso podemos suponer que es una trayectoria recta.
Resolver completamente el problema anterior no es tarea fácil; en el proceso de solución se tendrá que pasar por una aproximación que dará una respuesta parcial y, al mejorar las aproximaciones seguidas por un proceso de límite, se llegará a la solución. Podemos considerar un caso particular más simple del problema al que sí daremos solución completa, para después indicar como resolver el caso general.

Ejemplo 1.2.1 *Supongamos que un automóvil viaja por un camino con velocidades constantes en cada intervalo de tiempo como se indica en la siguiente tabla (hay que admitir que esta es una suposición físicamente imposible, ya que la velocidad no puede cambiar abruptamente de un instante a otro pero sí modela la situación en que la velocidad representa la velocidad promedio en el intervalo de tiempo). Determinar la distancia recorrida en cada instante.*

Tiempo (min)	Velocidad (km/h)
$0 < t \le 5$	20
$5 < t \le 8$	40
$8 < t \le 10$	60
$10 < t \le 30$	80
$30 < t \le 45$	60
$45 < t \le 50$	0
$50 < t \le 55$	60
$55 < t \le 60$	40

▼ Con la información proporcionada en la tabla podemos graficar la velocidad en función del tiempo como sigue:



Esto se puede interpretar como un viaje corto en automóvil.

- Comenzando los primeros 5 minutos a una velocidad promedio de 20 km/h.
- Del minuto 5 al 8, a 40 km/h.
- Del minuto 8 al 10, a 60 km/h (tal vez porque se está dejando atrás el tráfico lento).
- Los siguientes 20 minutos (del 10 al 30), a una velocidad de 80 km/h.
- Después, de los minutos 30 al 45 se disminuye la velocidad a 60 km/h.
- Para detenerse por completo (digamos para cargar gasolina), del minuto 45 al 50.
- Luego de esa pausa el viaje continúa a 60 km/h, del minuto 50 al 55.
- Por último, a 40 km/h, del minuto 55 al 60.

Para calcular la distancia recorrida, tenemos que recordar que para una velocidad constante v, en un intervalo de tiempo t, la distancia recorrida d en ese intervalo satisface

$$d = vt.$$

Tenemos que tomar en cuenta las unidades correctas para hacer las operaciones, de modo que 20 km/h son $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ km/min; 40 km/h equivale a $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ km/min y así con las demás velocidades del automóvil. De esta manera, en los primeros 5 minutos, al viajar a $\frac{1}{3}$ km/min, el automóvil recorrió

$$d_1 = \left(\frac{1}{3}\right)(5) = \frac{5}{3} \text{ km}.$$

En los minutos 5 a 8 recorrió $d_2 = \left(\frac{2}{3}\right)(3) = 2$ km; de manera similar podemos calcular las distancias recorridas en los demás intervalos, como se muestra en la siguiente tabla.

Número de intervalo	Intervalo de tiempo	Duración del intervalo (minutos)	Velocidad (en km/min)	Distancia recorrida en el intervalo (en km)	Distancia recorrida (en km) acumulada desde el inicio
1	$0 < t \le 5$	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
2	$5 < t \le 8$	3	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$
3	$8 < t \le 10$	2	1	2	$\frac{11}{3} + 2 = \frac{17}{3}$
4	$10 < t \le 30$	20	$\frac{4}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{17}{3} + \frac{80}{3} = \frac{97}{3}$
5	$30 < t \le 45$	15	1	15	$\frac{97}{3} + 15 = \frac{142}{3}$
6	$45 < t \le 50$	5	0	0	$\frac{142}{3} + 0 = \frac{142}{3}$
7	$50 < t \le 55$	5	1	5	$\frac{142}{3} + 5 = \frac{157}{3}$
8	$55 < t \le 60$	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{157}{3} + \frac{10}{3} = \frac{167}{3}$

Esta tabla casi se explica por sí misma; en la tercera columna está la duración en minutos de cada intervalo en el que el automóvil ha avanzado a velocidad constante; en la siguiente columna se encuentra la velocidad convertida a km/min; en la quinta columna, la distancia recorrida en el intervalo correspondiente, esta se obtiene en cada renglón al hacer el producto de las dos columnas que le preceden. La última columna muestra la distancia desde el inicio, así que la distancia que aparece en la entrada inferior derecha, muestra la distancia total recorrida, que es $\frac{167}{3} \approx 55.33$ km.

□

Si denotamos por $d_1, d_2, \ldots, d_8$ las distancias que se recorrieron en cada intervalo, por $v_1, v_2, \ldots, v_8$ las velocidades en cada intervalo y por $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_8$ la duración de cada intervalo, vemos claramente que la distancia total recorrida d cumple:

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_8 = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_8 \Delta t_8 = \sum_{i=1}^{8} v_i \Delta t_i;$$

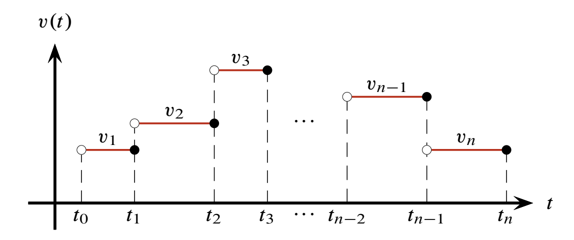
(donde la letra griega $\sum$ se utiliza para abreviar la suma de los 8 términos).
Al ver esta igualdad, se puede inferir lo siguiente: si se tuviese una sucesión de n intervalos de tiempo Δt_1, $\Delta t_2, \cdots, \Delta t_n$, en los que el móvil mantiene velocidades constantes $v_1, v_2, \cdots, v_n$, las distancias recorridas en cada uno de dichos intervalos serían:

$$d_1 = v_1 \Delta t_1, d_2 = v_2 \Delta t_2, \ldots, d_n = v_n \Delta t_n.$$

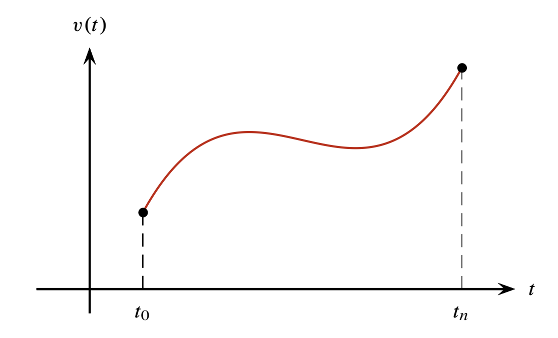
Luego, la distancia total recorrida sería

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_n = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_n \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i.$$

(donde la letra griega $\sum$ se utiliza para abreviar la suma de los n términos).
Lo que gráficamente se vería de la siguiente forma:



donde $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, $\Delta t_3 = t_3 - t_2, \ldots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ son los intervalos de tiempo que pueden ser de igual o diferente tamaño.
Ahora bien, si la velocidad $v(t)$ del móvil variase continuamente con el tiempo en vez de ser constante en diferentes intervalos de tiempo ¿se podría calcular el valor de la distancia total recorrida a lo largo del tiempo $[t_0, t_n]$?



Indiscutiblemente que este problema es más complejo que los anteriormente mecionados. La complejidad se debe a que la velocidad $v(t)$ ya no es constante por intervalos de tiempo, lo que trae consigo que no podamos calcular la distancia recorrida en cada uno de dichos intervalos mediante la igualdad $d_k = v_k \Delta t_k$.
Sin embargo, en cada intervalo de tiempo Δt_k podríamos pensar en una velocidad constante $\hat{V}_k$ que fuese representativa de las velocidades $v(t)$ alcanzadas en dicho intervalo, algo así como una velocidad media en el intervalo.
Con esto se tendría que $\hat{V}_k \Delta t_k$ sería una aproximación de la distancia recorrida por el móvil en el intervalo Δt_k, es decir:

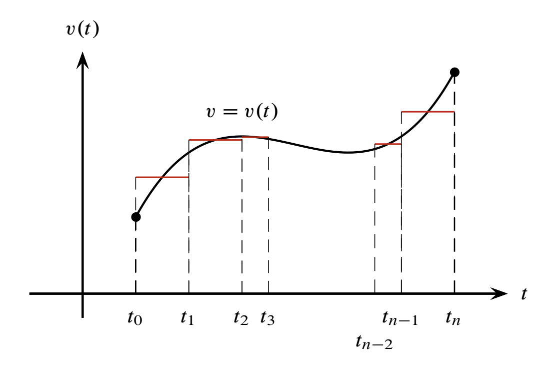
$$d_k \approx \hat{V}_k \Delta t_k \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Estas aproximaciones en los intervalos nos llevaría a un valor aproximado para la distancia total d recorrida por el móvil desde $t = t_0$ hasta $t = t_n$.
Tal aproximación sería:

$$d \approx \hat{V}_1 \Delta t_1 + \hat{V}_2 \Delta t_2 + \ldots + \hat{V}_n \Delta t_n$$

o bien

$$d \approx \sum_{k=1}^{n} \hat{V}_k \Delta t_k \,.$$



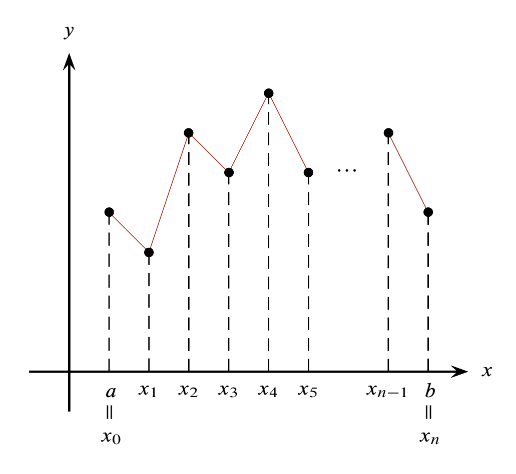
Ahora bien:
¿Cómo elegir la velocidad constante $\hat{V}_k$ para que sea representativa de $v(t)$ en el intervalo de tiempo Δt_k?
Daremos respuesta a esta pregunta en las secciones siguientes, junto con las condiciones para que se pueda resolver este tipo de problemas.

1.2.4 Medición de la longitud de una curva

Presentamos ahora otro problema que guarda mucho parecido con el de la subsección anterior y se puede resolver de manera similar.
Dada una curva $\mathcal{C}$, que es la gráfica de una función continua $y = f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, ¿cómo podemos medir su longitud en dicho intervalo? De nuevo, el problema no puede resolverse ahora en la forma general que está planteado. Sin embargo, podemos proponer un problema algo más simple.

Ejemplo 1.2.2 *Supongamos que la curva* $\mathcal{C}$ *es una poligonal que pasa por los puntos* (x_0, y_0), (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots,$ (x_n, y_n), *donde* $a = x_0$, $b = x_n$: *determinar la longitud de la curva.*

▼ Con la suposición de que $\mathcal{C}$ es una poligonal, todo lo que hace falta es sumar las longitudes de los segmentos rectilíneos que la forman.



Para ello utilizamos la fórmula para la distancia entre dos puntos, conocida en geometría analítica:

$$\operatorname{dist}\left[(x_1, y_1), (x_2, y_2)\right] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

De esta forma, la longitud de la poligonal es

$$\begin{aligned}\text{Longitud }(\mathscr{C}) &= \text{dist }[(x_0, y_0), (x_1, y_1)] + \text{dist }[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] + \ldots + \text{dist }[(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)] = \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \ldots + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}\,.\end{aligned}$$

La presencia de las raíces cuadradas en esta suma complica un poco las cosas (recuerde que la suma de raíces cuadradas no es lo mismo que la raíz cuadrada de la suma), pero algo se puede hacer para abreviar la suma anterior, si se utiliza la notación para sumas (que se explicará en una sección posterior).

$$\text{Longitud }(\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}\,.$$

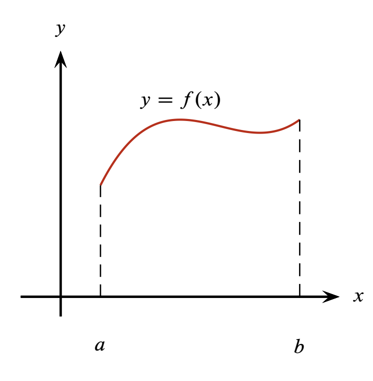
Además, ya que $x_k \neq x_{k-1}$ y por ende $x_k - x_{k-1} \neq 0$, podemos hacer la siguiente factorización en cada sumando:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \cdot \left[1 + \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{(x_k - x_{k-1})^2}\right]} = \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + (m_k)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}),\end{aligned}$$

en donde hemos denotado el cociente $\dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$ por m_k, puesto que es la pendiente del k–ésimo segmento de $\mathscr{C}$, que une a (x_{k-1}, y_{k-1}) con (x_k, y_k). También podríamos denotar $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, con lo que la ecuación para la longitud queda:

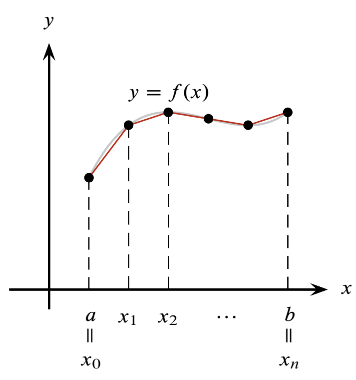
$$\text{Longitud }(\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\ \Delta x_k. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) nos permite calcular la longitud de cualquier poligonal (con la única restricción de que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$), y podemos plantearnos calcular la longitud de curvas más generales, como la presentada en la siguiente figura, donde la curva $\mathscr{C}$ es la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$:



Con este ejemplo puede el lector obtener una aproximación, tomando puntos en la curva con abscisas $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ para formar una poligonal cuya longitud en $[a, b]$ será menor o igual[2] que la longitud de la curva $\mathscr{C}$ en el mismo intervalo:

2. Porque la distancia entre dos puntos medida en línea recta es la más corta.



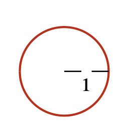
Así podemos concluir de manera intuitiva:

$$\text{Longitud } (\mathscr{C}) \geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+m_k^2}\ \Delta x_k\ ,\ \text{o bien}\ ,\ \text{Longitud } (\mathscr{C}) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+m_k^2}\ \Delta x_k,$$

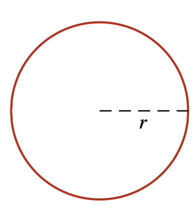
donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $m_k = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$.
Si usamos muy pocos puntos en la curva para formar la poligonal, la aproximación puede ser muy pobre, pero a medida que se aumenten puntos en la curva y, consecuentemente, segmentos de la poligonal, la precisión mejorará.

□

Usualmente se enseña en la escuela elemental que el perímetro de un círculo es el producto de 2π por el radio del mismo, y que π es aproximadamente 3.1416. ¿Cómo se llegó a ese resultado?



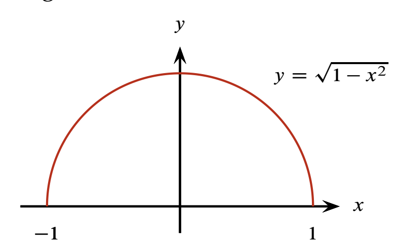
Perímetro $= 2\pi$



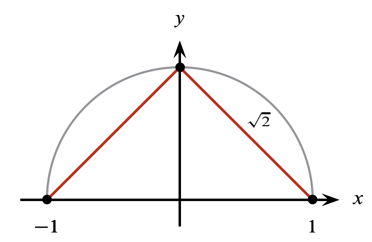
Perímetro $= 2\pi r$

Ejemplo 1.2.3 *¿Cuánto vale π?*

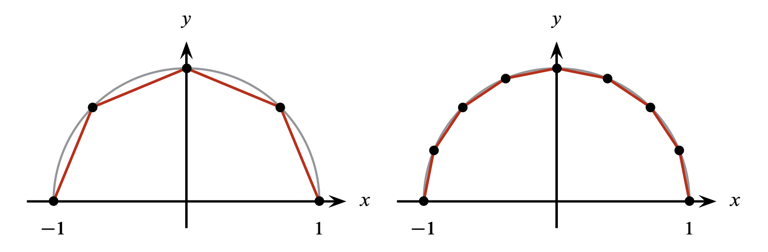
▼ La respuesta es en parte por proporcionalidad. Todos los círculos son figuras semejantes, así que si un círculo tiene radio 1 y otro radio r entonces, si el perímetro del primero es P, el del segundo debe ser $P \cdot r$, es decir, la proporción entre los radios de los círculos es la misma que debe haber entre sus perímetros, y solamente tendríamos que comprobar que el perímetro de un círculo de radio 1 es 2π, con $\pi = 3.1415926\ldots$ Además, bastaría con aproximar el valor de la longitud de media circunferencia unitaria y comprobar que este es aproximadamente π, como en la figura:



Para conocer el valor de π hay que aproximar la longitud de esta media circunferencia usando poligonales: si usamos una poligonal por los puntos extremos y el punto medio, obtendremos, como primera aproximación que $\pi \approx 2\sqrt{2} \approx 2.8284$.



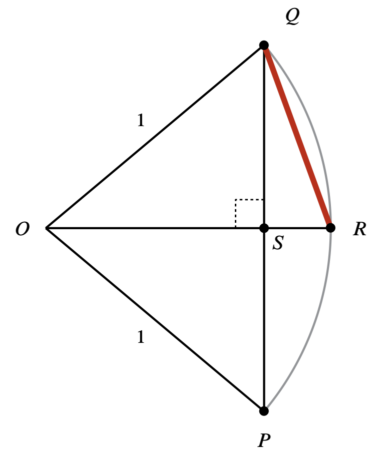
Esta es una aproximación deficiente, pero la podemos mejorar si añadimos los puntos medios de los arcos de círculo, obteniendo así una poligonal de cuatro segmentos, y podríamos después repetir el procedimiento duplicando cada vez el número de segmentos, como se muestra en la figura:



Obtendríamos así una sucesión de sumas (de los lados de las poligonales) que crece y se aproxima cada vez más al valor de la longitud de la semicircunferencia de radio 1 que llamamos π:

$$S_1 = 2\sqrt{2} = 2L_1, \quad S_2 = 4L_2, \quad S_3 = 8L_3, \quad \ldots, \quad S_n = 2^n L_n,$$

donde hemos denotado con $L_2, L_3, \ldots, L_n$ las longitudes de los segmentos poligonales y $L_1 = \sqrt{2}$. Un razonamiento geométrico nos permite obtener el valor de L_n en función del anterior L_{n-1}:



1. La cuerda $\overline{PQ}$ tiene longitud L_{n-1}.
2. R es el punto medio del arco $\widehat{PQ}$ (por lo que S es el punto medio de $\overline{PQ}$).
3. $\overline{OR}$ es ortogonal (perpendicular) a $\overline{PQ}$.
4. El triángulo rectángulo ΔOSQ con hipotenusa 1, tiene el lado $|\,\overline{QS}\,| = \dfrac{1}{2}L_{n-1}$.

Por lo anterior el lado $\overline{OS}$ medirá, de acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$|\,\overline{OS}\,| = \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}.$$

Por otro lado, en el triángulo rectángulo ΔSRQ tenemos:

$$|\,\overline{QS}\,| = \frac{L_{n-1}}{2}; \quad |\,\overline{SR}\,| = 1 - |\,\overline{OS}\,| = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}$$

y la hipotenusa QR, que es L_n satisface, según el teorema de Pitágoras, $|\,\overline{QR}\,|^2 = |\,\overline{QS}\,|^2 + |\,\overline{SR}\,|^2$, es decir,

$$L_n^2 = \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2 + \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}\right]^2 = \frac{(L_{n-1})^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} + 1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2 =$$

$$= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{L_{n-1}^2}{4}} = 2 - \sqrt{4 - L_{n-1}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_{n-1}^2}}.$$

De lo anterior, dado que $L_1 = \sqrt{2}$:

$$L_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$L_3 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_2^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$L_4 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_3^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Por lo que, las longitudes de las poligonales obtenidas (en cada partición) son

$$S_1 = 2\sqrt{2} = 2.8284\ldots;$$

$$S_2 = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3.0614\ldots;$$

$$S_3 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 3.1214\ldots;$$

$$S_4 = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 3.1365\ldots$$

Continuando de esta manera es posible encontrar mejores aproximaciones del número $\pi = 3.1415926\ldots$, del cual se sabe hoy en día que es irracional y se han llegado a calcular, usando diversos métodos y modernas computadoras, alrededor de 2^{32} dígitos en la parte decimal.

□

Después de haber presentado los problemas y ejemplos anteriores, junto con sus soluciones o ideas para resolverlos, para cerrar esta sección nos gustaría resaltar algunas características comunes a todos ellos que son el germen del cálculo integral.
En los problemas presentados, cálculo de áreas, distancia recorrida a una velocidad variable conocida y longitud de curvas, hemos visto que resolver el problema en forma general puede ser muy complicado, sin embargo:

1. Todos ellos pueden resolverse en forma aproximada realizando algunas simplificaciones, que consisten básicamente en sustituir la curva original por otra que tiene un número finito de valores y está cercana a la curva original.

2. En todos los problemas el cálculo de la solución, nos conduce a aproximar por medio de sumas, en las cuales cada sumando es un producto del valor de una función por una cantidad pequeña (Δt_i o bien Δx_i), que puede ser considerada como un pequeño incremento de la variable independiente.

3. En cualquiera de los tres problemas, al hacer *más finos* los métodos de aproximación obtenemos resultados más cercanos al valor real buscado.

De eso trata precisamente el cálculo integral; describiremos con más precisión y detalle en las secciones siguientes el proceso que se aplica para resolver problemas como los discutidos en esta sección.

Más concretamente, presentamos en la siguiente sección cómo encontrar el área de una región bajo una curva que es la gráfica de una función; posteriormente introducimos las sumas que surgen del cálculo aproximado de áreas, llamadas sumas de Riemann, que nos permiten definir la integral de una función. El resto de este capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de la integral junto con la relación que guarda con la derivada, así como algunas de sus aplicaciones.

Es posible que el lector haya leído o escuchado anteriormente alguna expresión como "la integral es lo contrario de la derivada". Los autores de este libro consideramos tal afirmación inapropiada, porque desorienta al estudiante, no informa con claridad en qué sentido es su significado y, lo que es aún peor, reduce la integral a una especie de apéndice de la derivada, lo cual es completamente inadecuado. Más adelante veremos cómo se debe precisar la afirmación mencionada para darle validez, hasta ese momento pedimos al lector que sea paciente y vea la presentación que hacemos de la integral sin pensar en derivadas.

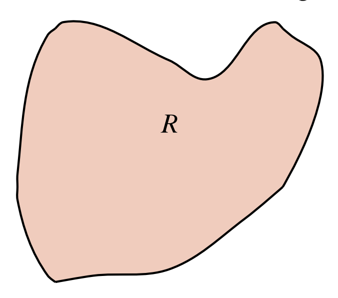
CAPÍTULO

1

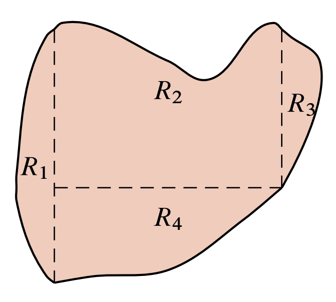
La integral

1.3 Cálculo aproximado del área de una región plana bajo una curva

Retomamos en esta sección el problema del cálculo de áreas, introduciendo algunas simplificaciones y notaciones que nos permitirán resolverlo. Supongamos que se desea calcular el área de una región del plano acotada por una curva continua como la mostrada en la siguiente figura:



Basados en las propiedades del área enunciadas anteriormente, vemos que se puede subdividir la región R en varias subregiones como sigue:

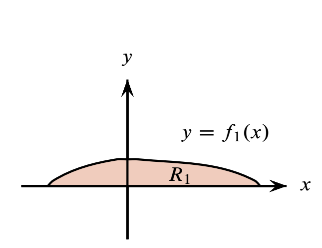


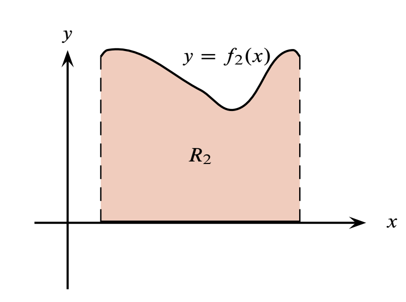
y, por tratarse de regiones que no se traslapan, tenemos entonces:

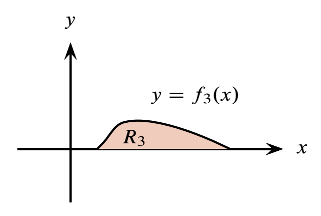
$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4).$$

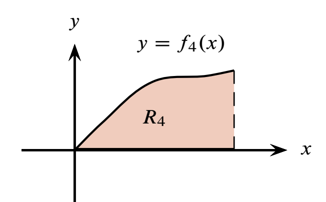
1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Si rotamos algunas de las subregiones de la figura anterior y además introducimos ejes coordenados, vemos que habrá que calcular las áreas de las siguientes regiones para encontrar $A(R)$:









La observación importante ahora es que estas cuatro regiones tienen algo en común:

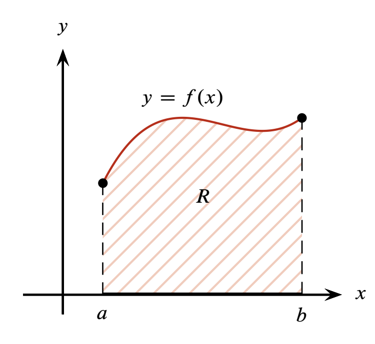
1. Todas ellas se ven como una región limitada arriba por una curva, abajo por el eje horizontal x y a los lados (en el caso de R_2 y R_4) por rectas verticales.

2. Suponemos que las curvas que acotan por arriba cada una de estas regiones representan la gráfica de una función continua $y_i = f_i(x)$ con $i = 1, 2, 3, 4$.

3. Por la forma como se han situado en el plano cartesiano estas funciones cumplen que $f_i(x) \geq 0$.

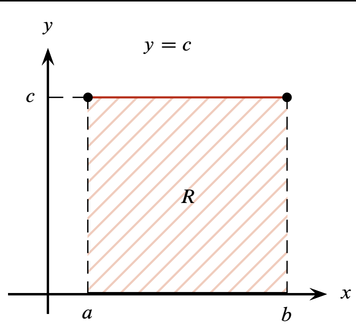
Por lo anterior, vemos que el cálculo de $A(R_1), A(R_2), A(R_3)$ o $A(R_4)$ se reduce a resolver el problema siguiente:

- Calcular el área de una región R acotada arriba por una función continua $y = f(x) \geq 0$, abajo por el eje x, así como a los lados por las rectas verticales $x = a$ & $x = b$.

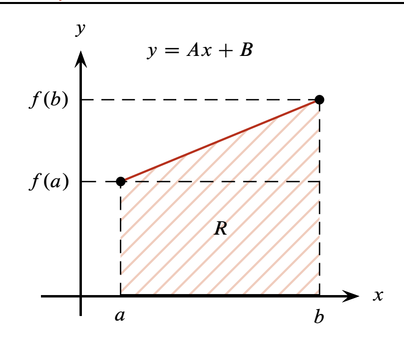


Casos particulares

1. El cálculo del área que se pide en este problema sería muy fácil si la función $f(x)$ fuese constante (pues entonces la región sería un rectángulo) o lineal (porque entonces la región sería un trapecio). En estos casos:



$f(x) = c$,
así que el área es
$A(R) = (b - a) \cdot c$,
es decir, base × altura.



$f(x) = Ax+B \Rightarrow f(a) = Aa+B$ & $f(b) = Ab+B$,
así que el área es

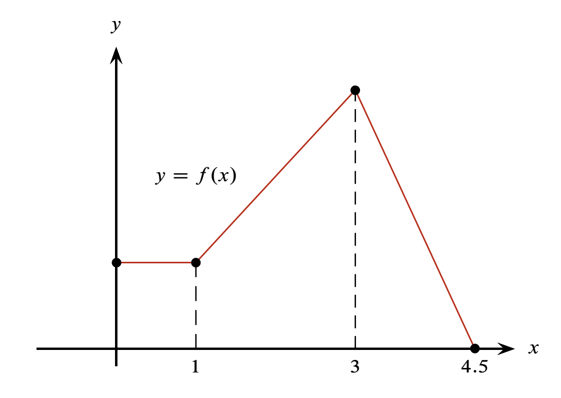
$$A(R) = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f(b) - f(a)] =$$
$$= \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)].$$

2. Un caso más en el que se puede calcular $A(R)$ con relativa facilidad es cuando la función $f(x)$ es lineal por tramos, es decir, cuando hay un conjunto finito de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de modo tal que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función $f(x)$ es constante o lineal. En tales casos, calcular el área $A(R)$ se reduce a calcular el área correspondiente a cada subintervalo como en el caso anterior y sumar dichas áreas.

Ejemplo 1.3.1 *Sea la función $f(x)$ definida como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \le x \le 1; \\ x, & si\ 1 < x \le 3; \\ 9 - 2x, & si\ 3 < x \le 4.5. \end{cases}$$

Calcular el área bajo la gráfica de $f(x)$, sobre el eje x en el intervalo $[0, 4.5]$.



▼ Aquí $x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 3 < x_3 = 4.5$, y, por ser $f(x)$ una función lineal por tramos, usando

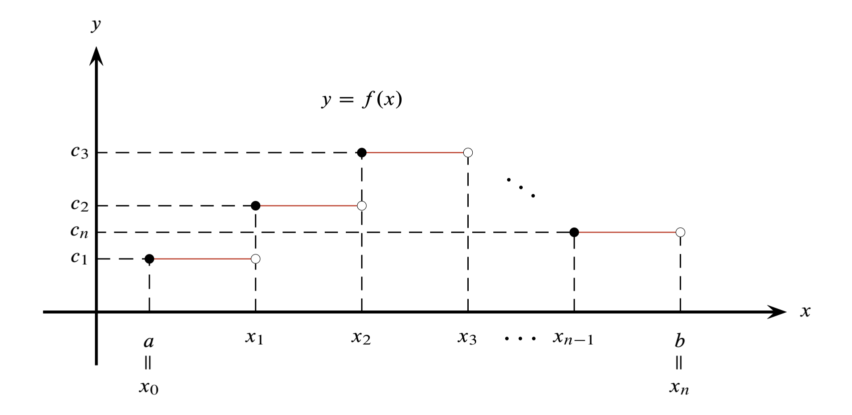
los resultados del caso 1. anterior, tenemos:

$$
\begin{aligned}
A(R) &= 1\cdot(x_1 - x_0) + && \boxed{\text{Tramo } [x_0, x_1]}\\
&+ \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f(x_1) + f(x_2)] + && \boxed{\text{Tramo } [x_1, x_2]}\\
&+ \frac{1}{2}(x_3 - x_2)[f(x_2) + f(x_3)] = && \boxed{\text{Tramo } [x_2, x_3]}\\
&= 1\cdot(1-0) + \frac{1}{2}(3-1)[1+3] + \frac{1}{2}(4.5-3)[3+0] =\\
&= 1 + 4 + \frac{1}{2}(1.5)(3) = 5 + \frac{1}{2}(4.5) = 5 + 2.25 = 7.25.
\end{aligned}
$$

□

3. Es posible resolver casos en los que la función no es continua, pero es constante por tramos. A estas funciones se les llama comúnmente funciones escalonadas. En general, una función escalonada tiene la forma siguiente: para un conjunto finito de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, en donde $f(x) = c_i$ para $x_{i-1} < x < x_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n,$ & $c_i \geq 0$.

Ejemplo 1.3.2 *Calcular el área bajo la gráfica de dicha función y sobre el eje x.*



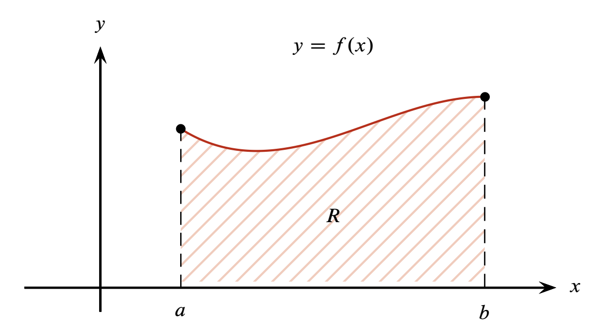
▼ Con los datos disponibles se puede calcular el área como sigue, de acuerdo con las observaciones previas:

$$
\begin{aligned}
A(R) &= c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_2) + \ldots + c_n(x_n - x_{n-1}) =\\
&= c_1\Delta x_1 + c_2\Delta x_2 + c_3\Delta x_3 + \ldots + c_n\Delta x_n,
\end{aligned}
$$

donde hemos denotado $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

□

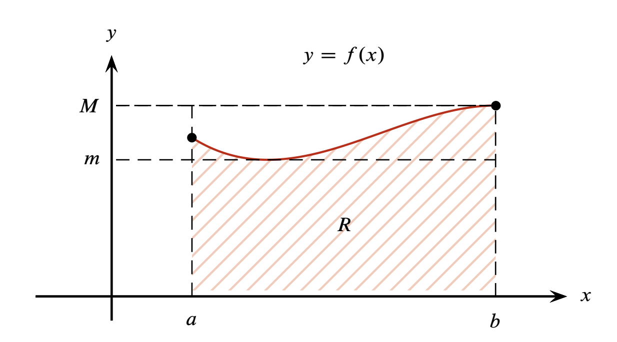
Volvamos al caso general del cálculo del área $A(R)$ de la región R limitada por la gráfica de una función continua $f(x) \geq 0$, el eje x, y la rectas $x = a$ & $x = b$.



Para una función f dada de manera arbitraria es imposible, con las herramientas de que disponemos, dar el valor exacto del área $A(R)$. Sin embargo es posible hacer algo respecto al problema.
Procederemos de la siguiente manera:

1. Relacionaremos nuestro problema con otro similar, pero más fácil de resolver.
2. Generaremos un procedimiento o criterio que nos permita obtener aproximaciones o estimaciones para $A(R)$.
3. Cada aproximación será acompañada de una estimación del error cometido.
4. Aplicaremos el nuevo procedimiento o criterio para obtener, cada vez, aproximaciones mejores y acompañadas de errores cada vez más pequeños.

- Primera aproximación.



Como el intervalo $[a, b]$ es cerrado y acotado, y la función $y = f(x)$ es continua, esta debe alcanzar sus valores mínimo y máximo en ese intervalo, denotémoslos por m y M respectivamente. Entonces el rectángulo menor con base $[a, b]$ y altura m queda comprendido totalmente dentro de la región R, y esta a su vez comprendida en el rectángulo mayor con la misma base y altura M. Entonces las áreas cumplen las desigualdades:

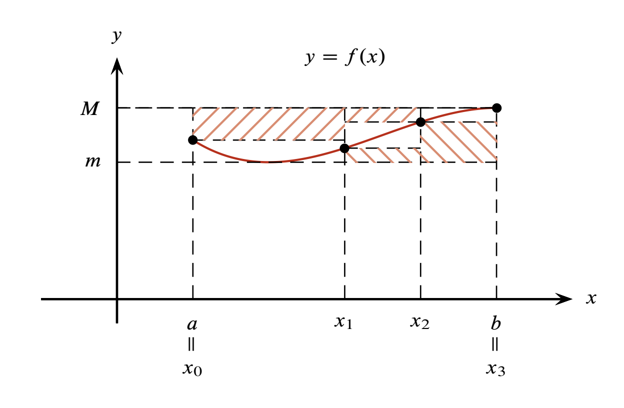
$$A(\text{rectángulo menor}) \leq A(R) \leq A(\text{rectángulo mayor}),$$

es decir,

$$m(b-a) \leq A(R) \leq M(b-a).$$

Tenemos que admitir que esta primera aproximación puede que no sea muy buena, así que debemos buscar alguna manera de mejorarla.

- Segunda aproximación. Si hacemos una subdivisión del intervalo original $[a, b]$ y repetimos la aproximación que acabamos de hacer en cada uno de los subintervalos, obtendremos al sumar las aproximaciones así realizadas, una desigualdad mejorada. Por ejemplo, en la siguiente figura hemos partido el intervalo original de la figura anterior en tres subintervalos al introducir $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$.



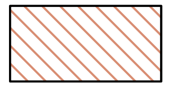
En cada subintervalo hay un valor mínimo y otro máximo de la función. Podemos denotar con m_1, M_1 (respectivamente) para el primer subintervalo $[x_0, x_1]$; con m_2, M_2 (respectivamente) para el segundo subintervalo $[x_1, x_2]$; y con m_3, M_3 (respectivamente) para el tercer subintervalo $[x_2, x_3]$. Si denotamos con R_1, R_2 & R_3 las porciones de R contenidas en el primero, segundo y tercer subintervalo, respectivamente, tendremos que, al igual que antes,

$$m_1(x_1 - x_0) \leq A(R_1) \leq M_1(x_1 - x_0);$$
$$m_2(x_2 - x_1) \leq A(R_2) \leq M_2(x_2 - x_1);$$
$$m_3(x_3 - x_2) \leq A(R_3) \leq M_3(x_3 - x_2).$$

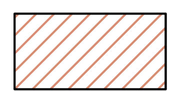
De esta forma al sumar las anteriores desigualdades resulta:

$$m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) \leq A(R) \leq M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2),$$

ya que $A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) = A(R)$. Esta última desigualdad es mejor que la que teníamos antes, pues la suma de las áreas de los rectángulos inferiores aumentó en las áreas de los rectángulos sombreados

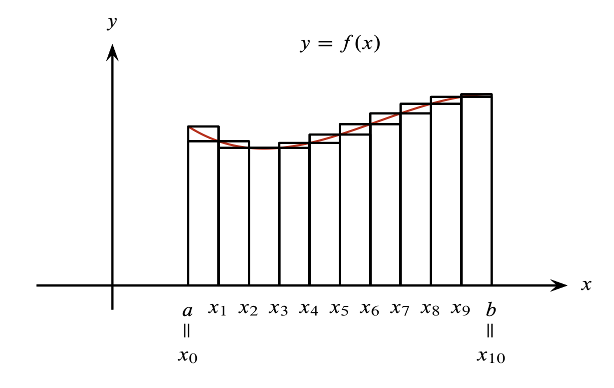


mientras que la suma de las áreas de los rectángulos superiores disminuyó en las áreas de los rectángulos sombreados



de manera que el valor real del área $A(R)$ se encuentra ahora entre dos números más cercanos uno del otro.

El procedimiento de aumentar el número de subintervalos puede repetirse a voluntad, y podemos así subdividir el rectángulo en 5, 10, 100 o 1 000 subintervalos y mientras más subintervalos haya debemos obtener mejores aproximaciones. La siguiente figura muestra cómo se vería una aproximación al partir el intervalo $[a, b]$ de la figura original en 10 subintervalos:

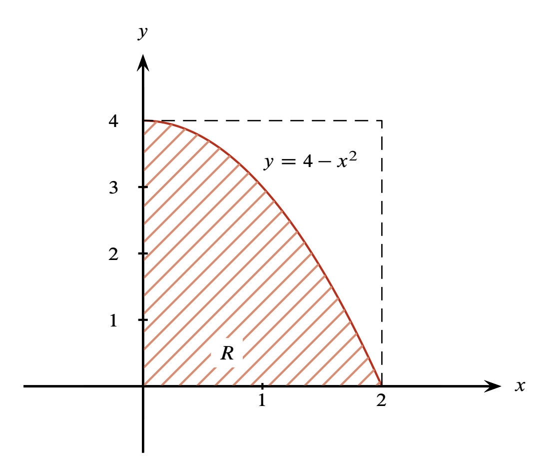


Se puede observar que la suma de áreas de los rectángulos inferiores (respectivamente superiores) nos da una mejor aproximación al valor de $A(R)$, pues los inferiores casi llenan la region R, y los superiores cubren a R con muy poco espacio de más. La diferencia entre los superiores y los inferiores es mucho menor que al principio, y es de esperarse que a medida que aumente el número n de

subintervalos, o que $n \to \infty$, la suma de las áreas de rectángulos superiores e inferiores tiendan a ser iguales; pero como $A(R)$ está comprendida entre estas dos sumas, se espera que su valor sea igual al valor común de los límites.

Ejemplo 1.3.3 *Estimar el área debajo de la gráfica de* $f(x) = 4 - x^2$, *sobre el eje* x, *entre* $x = 0$ & $x = 2$, *con un error menor o igual a* 0.5 *unidades cuadradas.*

▼ El área a estimar es la que se muestra sombreada en la siguiente figura, en la que se puede apreciar que el máximo de la función en el intervalo $[0, 2]$ es $M = f(0) = 4$, y el mínimo es $m = f(2) = 0$.



De esta forma, la primera aproximación que tenemos es

$$0 \cdot (2 - 0) \leq A(R) \leq 4 \cdot (2 - 0),$$

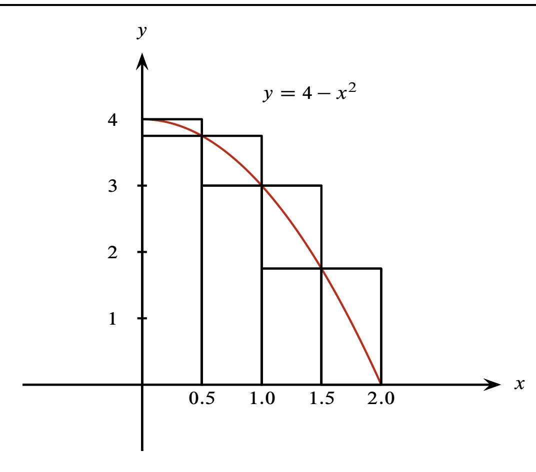
es decir, $0 \leq A(R) \leq 8$. La diferencia entre los dos extremos de estas desigualdades es tan grande que resulta evidente que el error de aproximación no es menor o igual a 0.5 unidades cuadradas.
Si hacemos un segundo intento tomando cuatro subintervalos de igual longitud podemos entonces tomar

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.5\ \ \&\ \ x_4 = 2.$$

Como puede observarse directamente [o también tomando la derivada $f'(x) = -2x < 0$ en el intervalo $(0, 2)$], la función $f(x)$ es decreciente así que en cada subintervalo su máximo es el valor de $f(x)$ en el extremo izquierdo y su mínimo el valor de $f(x)$ en el extremo derecho, por lo que dichos máximos y mínimos son como se muestra en la siguiente tabla:

Intervalo	Extremos	Valor mínimo m_i	Valor máximo M_i
1	$[0, 0.5]$	$m_1 = f(0.5) = 3.75$	$M_1 = f(0) = 4$
2	$[0.5, 1]$	$m_2 = f(1) = 3$	$M_2 = f(0.5) = 3.75$
3	$[1, 1.5]$	$m_3 = f(1.5) = 1.75$	$M_3 = f(1) = 3$
4	$[1.5, 2]$	$m_4 = f(2) = 0$	$M_4 = f(1.5) = 1.75$

La siguiente figura muestra los rectángulos que aproximan el área $A(R)$ por debajo y por encima, y a continuación están los cálculos de la suma de áreas de los rectángulos inferiores y superiores:



Suma de áreas de los rectángulos inferiores (suma inferior):

$$3.75(0.5-0)+3(1-0.5)+1.75(1.5-1)+0(2-1.5) = 0.5(3.75+3+1.75+0) =$$
$$= 0.5(8.5) = 4.25\,.$$

Suma de áreas de los rectángulos superiores (suma superior):

$$4(0.5-0)+3.75(1-0.5)+3(1.5-1)+1.75(2-1.5) = 0.5(4+3.75+3+1.75) =$$
$$= 0.5(12.5) = 6.25\,.$$

Por lo anterior:

$$4.25 \leq A(R) \leq 6.25.$$

Con esta segunda aproximación la diferencia entre las sumas inferior y superior disminuyó a 2 unidades cuadradas, y si diéramos como aproximación de $A(R)$, digamos

$$A(R) = \frac{4.25+6.25}{2} = \frac{10.5}{2} = 5.25 \text{ unidades cuadradas } (\text{u}^2)\,,$$

el error cometido sería menor o igual a una unidad cuadrada, mejorando la aproximación anterior pero aún no suficiente.

El siguiente intento de mejorar la aproximación lo haremos con 8 subintervalos de igual longitud: la elección de este número de subintervalos es arbitraria y se hace simplemente por facilidad. La siguiente tabla muestra los valores de los x_i, m_i, M_i.

Intervalo	Extremos	m_i	M_i
1	[0, 0.25]	$m_1 = f(0.25) = 3.9375$	$M_1 = f(0) = 4$
2	[0.25, 0.5]	$m_2 = f(0.5) = 3.75$	$M_2 = f(0.25) = 3.9375$
3	[0.5, 0.75]	$m_3 = f(0.75) = 3.4375$	$M_3 = f(0.5) = 3.75$
4	[0.75, 1]	$m_4 = f(1) = 3$	$M_4 = f(0.75) = 3.4375$
5	[1, 1.25]	$m_5 = f(1.25) = 2.4375$	$M_5 = f(1) = 3$
6	[1.25, 1.5]	$m_6 = f(1.5) = 1.75$	$M_6 = f(1.25) = 2.4375$
7	[1.5, 1.75]	$m_7 = f(1.75) = 0.9375$	$M_7 = f(1.5) = 1.75$
8	[1.75, 2]	$m_8 = f(2) = 0$	$M_8 = f(1.75) = 0.9375$
		suma = 19.25	SUMA = 23.25

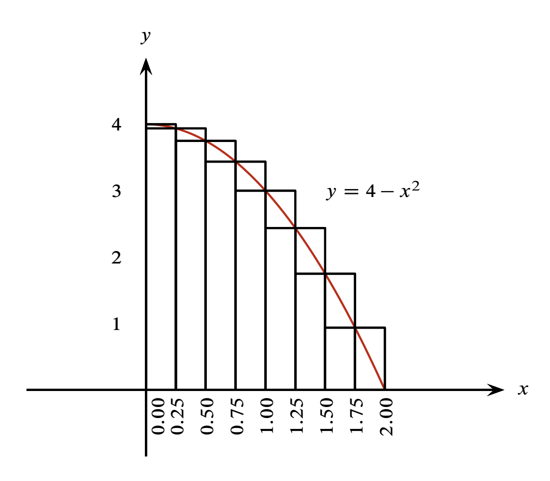
Las áreas inferior $A(\underline{R})$ y superior $A(\overline{R})$ se calculan multiplicando las sumas que aparecen en el renglón inferior por el valor $\Delta x = 0.25$, que es el ancho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$, así obtenemos:

Suma inferior:

$$A(\underline{R}) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ \ldots \ + m_8\Delta x = (m_1 + m_2 + \ \ldots \ + m_8)\Delta x =$$
$$= (\text{suma})\Delta x = 19.25(0.25) = 4.8125.$$

Suma superior:

$$A(\overline{R}) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ \ldots \ + M_8\Delta x = (M_1 + M_2 + \ \ldots \ + M_8)\Delta x =$$
$$= (\text{SUMA})\Delta x = 23.25(0.25) = 5.8125.$$



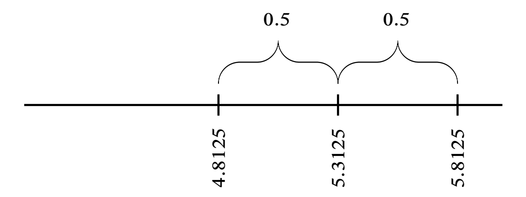
Así con esta aproximación hemos obtenido:

$$A(\underline{R}) = 4.8125 \leq A(R) \leq 5.8125 = A(\overline{R}).$$

Como $A(R)$ se encuentra entre 4.8125 y 5.8125, podríamos decir que

$$A(R) \approx \frac{A(\underline{R}) + A(\overline{R})}{2} = 5.3125 \ \text{ unidades al cuadrado } (\text{u}^2),$$

con un error menor o igual a 0.5 u^2.



Aunque no conocemos en este momento el valor de $A(R)$ sí sabemos que se encuentra dentro del intervalo $[4.8125, 5.8125]$ y que su distancia al valor aproximado 5.3125, que es el punto medio del intervalo, debe ser menor o igual que la mitad del ancho del intervalo, así:

$$\text{error} \leq \frac{1}{2}[5.8125 - 4.8125] = 0.5 \text{ u}^2.$$

□

Este ejemplo muestra que, dada una función continua $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$, siempre podemos estimar el valor del área bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$, $x = b$. La aproximación se puede mejorar introduciendo cada vez más puntos x_i para hacer que la partición del intervalo original en subintervalos sea cada vez más fina (lo cual implica que habrá un mayor número de subintervalos). No tenemos aún un criterio preciso que nos diga en cuántos subintervalos debemos partir el intervalo original para obtener una aproximación con un error menor que un valor dado de antemano, solamente sabemos que partiendo el intervalo original en un mayor número de subintervalos se tendrán estimaciones cada vez más precisas. En las secciones que siguen veremos cómo pasar de las aproximaciones al valor exacto de $A(R)$.

Ejercicios 1.3.1 *Cálculo aproximado del área.* *Soluciones en la página 11*

1. Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, sobre el eje x para los siguientes intervalos usando particiones de $2, 4$ y 8 subintervalos.

   a. En el intervalo $[0, 4]$;
   b. En el intervalo $[0, 1]$;
   c. En el intervalo $[1, 4]$.

   ¿Se pueden usar las aproximaciones obtenidas en los dos últimos incisos para mejorar la aproximación en el primer inciso? Explique.

2. Aproximar el área $A(R)$ debajo de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[\pi/2, \pi]$, calculando $A(\underline{R})$ y $A(\overline{R})$. Use una partición de 8 subintevalos y proporcione el valor del error que se comete.

3. Para la función $g(x) = \tan x$, encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica y sobre el eje x, desde $x = \pi/4$ hasta $x = \pi/3$; use 8 subintervalos de igual longitud calculando $A(\underline{R})$ y $A(\overline{R})$. Proporcione el error que se comete.

4. De acuerdo con la geometría elemental, el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es su radio. Considere el área bajo la curva $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, sobre el eje x y entre $x = 0$, $x = 2$. Observe que la región en cuestión es la cuarta parte de un círculo de radio 2, comprendida en el primer cuadrante del plano cartesiano. ¿Cuál es el valor del área de esa región? Estime el valor del área partiendo el intervalo $[0, 2]$ en $2, 4$ y 8 subintervalos. Estime el error de aproximación en cada caso.

Ejercicios 1.3.1 *Cálculo aproximado del área.* *Preguntas, página* 10

1. a. $[0, 4]$.
    i. 2 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 2.8284$; $A(\overline{R}) = 6.8284$; promedio $= 4.8284$; error ≤ 2.
    ii. 4 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 4.1463$; $A(\overline{R}) = 4.1463$; promedio $= 5.1463$; error ≤ 1.
    iii. 8 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 4.7650$; $A(\overline{R}) = 5.7650$; promedio $= 5.2650$; error ≤ 0.5.

   b. $[0, 1]$.
    i. 2 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 0.3536$; $A(\overline{R}) = 0.8536$; promedio $= 0.6036$; error ≤ 0.25.
    ii. 4 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 0.5183$; $A(\overline{R}) = 0.7683$; promedio $= 0.6433$; error ≤ 0.125.
    iii. 8 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 0.5956$; $A(\overline{R}) = 0.7203$; promedio $= 0.6581$; error ≤ 0.0625.

   c. $[1, 4]$.
    i. 2 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 3.8717$; $A(\overline{R}) = 5.3715$; promedio $= 4.6217$; error ≤ 0.75.
    ii. 4 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 4.2801$; $A(\overline{R}) = 5.03101$; promedio $= 4.6551$; error ≤ 0.375.
    iii. 8 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 4.4563$; $A(\overline{R}) = 4.8513$; promedio $= 4.6678$; error ≤ 0.1875.

   d. Si usamos los resultados de los intervalos $[0, 1]$ y $[1, 4]$ para 8 subintervalos, obtendremos una mejor aproximación, ya que se tendrían 16 subintervalos de $[0, 4]$.

2. $A(\underline{R}) = 0.8986$; $A(\overline{R}) = 1.095$; promedio $= 0.9968$; error ≤ 0.0982.

3. $A(\underline{R}) = 0.3348$; $A(\overline{R}) = 0.3587$; promedio $= 0.3468$; error ≤ 0.006.

4. a. $[0, 2]$.
    i. 2 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 1.7321$; $A(\overline{R}) = 3.7321$; promedio $= 2.7321$; error ≤ 1.
    ii. 4 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 2.4957$; $A(\overline{R}) = 3.4957$; promedio $= 2.9957$; error ≤ 0.5.
    iii. 8 subintervalos.
    $A(\underline{R}) = 2.8398$; $A(\overline{R}) = 3.3398$; promedio $= 3.0892$; error ≤ 0.25.

CAPÍTULO

1

La integral

1.4 Notación Σ para sumas

En esta sección introducimos una notación que sirve para abreviar la escritura de sumas en general. Se utiliza la letra griega sigma mayúscula (Σ) para abreviar sumas como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

El símbolo $\sum$ se lee: la suma de los términos a_i desde $i = 1$ hasta $i = n$. La letra i denota un índice, que varía desde el número 1 hasta n (denominados límites o extremos de i), y el símbolo a_i es el término general de la suma, que puede ser cualquier expresión que contenga el índice i.

1. Algunos ejemplos del uso de esta notación son los siguientes:

   a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$

   b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$

   c. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j(j+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 10 \cdot 11.$

   d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{k^2+2}{k+1} = \frac{1^2+2}{1+1} + \frac{2^2+2}{2+1} + \frac{3^2+2}{3+1} + \frac{4^2+2}{4+1} + \frac{5^2+2}{5+1} =$

   $\displaystyle = \frac{3}{2} + \frac{6}{3} + \frac{11}{4} + \frac{18}{5} + \frac{27}{6} = \frac{90+120+165+216+270}{60} = \frac{287}{20}.$

   e. $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} m_l \Delta x_l = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n.$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 1/ 2017

f. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} f(x_j^*)\Delta x_j = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \ldots + f(x_m^*)\Delta x_m.$

Como puede apreciarse en estos ejemplos, la notación $\sum$ para sumas es una manera de abreviar sumas que de otra forma ocuparían mucho espacio al escribirse. Se debe tomar en cuenta al usarla que la expresión $i = 1$ en la parte inferior de la $\sum$ es la que define cuál es el índice que varía a lo largo de la suma y cuál es su valor inicial; el número o letra encima de la $\sum$ indica cuál es el valor final del índice en la suma.

2. En ocasiones se añaden algunas condiciones adicionales sobre los índices en la parte inferior. Dos ejemplos de la notación sigma modificada se muestran a continuación:

$$\sum_{\substack{p=3\\ p \text{ primo}}}^{17} (p^2 - 1) = (3^2 - 1) + (5^2 - 1) + (7^2 - 1) + (11^2 - 1) + (13^2 - 1) + (17^2 - 1) = 656.$$

$$\sum_{\substack{k=6\\ k \text{ par}}}^{12} \left(\frac{k^3 - 2k + 5}{k - 3}\right) 2^k = \left(\frac{6^3 - 12 + 5}{3}\right) 2^6 + \left(\frac{8^3 - 16 + 5}{5}\right) 2^8 +$$

$$+ \left(\frac{10^3 - 20 + 5}{7}\right) 2^{10} + \left(\frac{12^3 - 24 + 5}{9}\right) 2^{12}.$$

Al usar la notación $\sum$ junto con las propiedades algebraicas ya conocidas de los números reales se obtienen resultados muy útiles para algunos cálculos como los siguientes:

3. Para cualquier constante a que sea el término general de una suma:

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n} = a \cdot n.$$

Así por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{8} 3 = 3(8) = 24, \qquad \sum_{i=1}^{30} 5 = 5(30) = 150, \qquad \sum_{k=5}^{10} 20 = 20(6) = 120.$$

4. Como consecuencia de la conmutatividad y asociatividad de la suma de números reales, en una suma de muchos términos, estos se pueden reordenar y reagrupar, y así obtenemos lo siguiente para una suma en la que los términos generales son a su vez sumas:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = \qquad \text{(reordenando y reagrupando)}$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

De esta manera, podemos partir una suma en varias sumas mas sencillas, como por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i;$$

$$\sum_{j=1}^{100} (j^3 - 2j^2 + 3^{-j}) = \sum_{j=1}^{100} j^3 - \sum_{j=1}^{100} 2j^2 + \sum_{j=1}^{100} 3^{-j}.$$

5. Otra propiedad que se obtiene a partir de la distributividad del producto sobre la suma es la siguiente, para cualquier constante c y término general a_k:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = (ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n) = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Como ejemplos sencillos de la aplicación de esta propiedad tenemos los siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3\sum_{i=1}^{n} i;$$

$$\sum_{j=1}^{100} 2j^2 = 2\sum_{j=1}^{100} j^2;$$

$$\sum_{k=1}^{80}(3k^2 + 2\sqrt{k-1}) = 3\sum_{k=1}^{80} k^2 + 2\sum_{k=1}^{80}\sqrt{k-1}.$$

6. Una observación pertinente al usar la notación $\sum$ es que los índices se tratan como variables mudas en el sentido de que se puede cambiar su nombre sin alterar el resultado. Así las siguientes sumas tienen el mismo resultado:

$$\sum_{i=1}^{10}(i^2 - 5i + 2) = \sum_{j=1}^{10}(j^2 - 5j + 2) = \sum_{k=1}^{10}(k^2 - 5k + 2);$$

$$\sum_{m=0}^{N}(2^m + m^2) = \sum_{n=0}^{N}(2^n + n^2) = \sum_{\alpha=0}^{N}(2^\alpha + \alpha^2).$$

7. De manera similar al cambio de nombre para un índice, en ocasiones se hacen corrimientos de índices. Esto consiste en reemplazar un índice y sus límites inferior y superior por otro índice al que se le suma o resta un número entero, por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{20}(i^2 + 3i) = \sum_{j=0}^{19}[(j+1)^2 + 3(j+1)].$$

Donde $i = j + 1$ y además $i = 1 \Rightarrow j = 0 \quad \& \quad i = 20 \Rightarrow j = 19$.

$$\sum_{j=1}^{40}(j+5)^3 - 3^{j+5} = \sum_{k=6}^{45}(k^3 - 3^k).$$

Donde $j + 5 = k$ y además $j = 1 \Rightarrow k = 6 \quad \& \quad j = 40 \Rightarrow k = 45$.

Vamos a enlistar a continuación algunos resultados particulares sobre sumas especiales, que nos serán muy útiles mas adelante.

1. La suma de los primeros n números enteros positivos se calcula con la formula siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Podemos convencernos de la validez de esta fórmula si sumamos los enteros de 1 a n en orden ascendente con los mismos enteros de forma descendente, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
S_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

La suma del primer y segundo renglón (horizontalmente) coinciden con $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$; en el tercer renglón tenemos las sumas verticales, hay n sumandos iguales a $n+1$, por lo que la suma total es $2S_n = n(n+1)$. Por lo tanto:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como ejemplo concreto:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5\,050.$$

Sobre esta suma en particular, se cuenta la anécdota de que la descubrió el famoso matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) cuando era un niño.

2. Sumas telescópicas. Se llaman así a las sumas en las que por razones de signo se cancelan por parejas todos los términos, excepto el primero y el último término.

Ejemplo 1.4.1 *Determinar el resultado final de las siguientes sumas telescópicas:*

a. $\sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i-1})$.

b. $\sum_{j=1}^{n}(b_{j+1}^2 - b_j^2)$.

c. $\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

d. $\sum_{l=1}^{M}\frac{1}{l(l+1)}$.

▼ Basta con utilizar la propiedad telescópica en los tres primeros ejercicios:

a. $\sum_{i=1}^{m}(a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{m-1} - a_{m-2}) + (a_m - a_{m-1}) = a_m - a_0$.

b. $\sum_{j=1}^{n}(b_{j+1}^2 - b_j^2) = (b_2^2 - b_1^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (b_4^2 - b_3^2) + \dots + (b_n^2 - b_{n-1}^2) + (b_{n+1}^2 - b_n^2) = b_{n+1}^2 - b_1^2$.

c.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}.\end{aligned}$$

d. Este último ejemplo es más difícil, pues no parece ser una suma telescópica. Pero se resuelve, dado que:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} = \frac{(l+1) - l}{l(l+1)} = \frac{1}{l(l+1)}.$$

De esta forma, usando esta igualdad:

$$\sum_{l=1}^{M}\frac{1}{l(l+1)} = \sum_{l=1}^{M}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) = 1 - \frac{1}{M+1} = \frac{M}{M+1}.$$

□

3. La suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos está dada por la fórmula siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.2}$$

Es este caso es algo más complicado verificar la validez de esta fórmula, pero se puede lograr utilizando algo de álgebra, Empecemos por usar la identidad del cubo de un binomio:

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1,$$

de donde, transponiendo términos, obtenemos:

$$3n^2 - 3n + 1 = n^3 - (n-1)^3,$$

que es válida para todo entero n. Si ahora escribimos esta fórmula de manera sucesiva para n, $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, 1 y sumamos columnas, obtendremos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
3n^2 & - & 3n & + & 1 & = & n^3 & - & (n-1)^3 \\
3(n-1)^2 & - & 3(n-1) & + & 1 & = & (n-1)^3 & - & (n-2)^3 \\
3(n-2)^2 & - & 3(n-2) & + & 1 & = & (n-2)^3 & - & (n-3)^3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
3(3)^2 & - & 3(3) & + & 1 & = & (3)^3 & - & 2^3 \\
3(2)^2 & - & 3(2) & + & 1 & = & (2)^3 & - & 1^3 \\
3(1)^2 & - & 3(1) & + & 1 & = & (1)^3 & - & 0^3 \\
\hline
3\sum_{k=1}^{n} k^2 & - & 3\sum_{k=1}^{n} k & + & \sum_{k=1}^{n} 1 & = & n^3 & - & 0^3
\end{array}$$

ya que la suma de los lados derechos es telescópica (excepto los extremos, los términos se anulan por parejas). De aquí resulta que

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 - \sum_{k=1}^{n} 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k = n^3 - n + 3\frac{n(n+1)}{2}.$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2(n^3-n) + 3n(n+1)}{6} = \frac{2n^3 - 2n + 3n^2 + 3n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

O sea:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Como ejemplo concreto de aplicación de esta fórmula tenemos:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10(10+1)[2(10)+1]}{6} = \frac{10(11)(21)}{6} = 385.$$

4. La suma de los cubos de los primeros n enteros positivos está dada por la fórmula siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{1.3}$$

Para verificar la validez de esta igualdad se utiliza un procedimiento similar al aplicado en el caso anterior. Empecemos usando la identidad:

$$(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1,$$

de donde, trasponiendo términos, obtenemos:

$$4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4,$$

que es válida para todo entero n. Si ahora escribimos esta fórmula de manera sucesiva para n, $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 3, 2, 1 y sumamos columnas, obtendremos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
4n^3 & - & 6n^2 & + & 4n & - & 1 & = & n^4 & - & (n-1)^4 \\
4(n-1)^3 & - & 6(n-1)^2 & + & 4(n-1) & - & 1 & = & (n-1)^4 & - & (n-2)^4 \\
4(n-2)^3 & - & 6(n-2)^2 & + & 4(n-2) & - & 1 & = & (n-2)^4 & - & (n-3)^4 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
4(3)^3 & - & 6(3)^2 & + & 4(3) & - & 1 & = & 3^4 & - & 2^4 \\
4(2)^3 & - & 6(2)^2 & + & 4(2) & - & 1 & = & 2^4 & - & 1^4 \\
4(1)^3 & - & 6(1)^2 & + & 4(1) & - & 1 & = & 1^4 & - & 0^4 \\
\hline
4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 & - & 6\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 & + & 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k & - & n & = & n^4 & - & 0^4.
\end{array}$$

ya que la suma de los lados derechos es telescópica (excepto los extremos, los términos se anulan por parejas).

De aquí resulta:

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + n;$$

ahora utilizamos las fórmulas (1.1) de la página 3 y (1.2) de la página 5:

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{n} k^3 &= n^4 + 6\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n = \\
&= n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = \\
&= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n = \\
&= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

que es la suma que se quería verificar.

Si bien es posible encontrar fórmulas similares para la suma de potencias de cualquier orden de los primeros n enteros positivos, no nos ocuparemos de ellas. Tales fórmulas fueron encontradas por el matemático suizo Jacques Bernoulli.

5. Suma de una progresión geométrica: se denomina progresión geométrica con razón r a la secuencia de números

$$r^0, r^1, r^2, \ldots, r^n.$$

Para $r = 1$ la progresión geométrica es constante:

$$1^0, 1^1, 1^2, \ldots, 1^n$$

y su suma es n. Comprobaremos que para $r \neq 1$ se cumple:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Para comprobar el resultado anterior denotemos por S_n a la suma y observemos lo que sucede cuando multiplicamos S_n por r y le restamos S_n:

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & rS_n & = & \not{r} & + & \not{r^2} & + & \not{r^3} & \ldots & + & \not{r^n} & + & r^{n+1} \\ - & S_n & = & 1 & + & \not{r} & + & \not{r^2} & + & \not{r^3} & \ldots & + & \not{r^n} \\ \hline & rS_n - S_n & = & r^{n+1} & - & 1. \end{array}$$

Por lo tanto:

$$(r-1)S_n = r^{n+1} - 1,$$

y, tomando en cuenta que $r \neq 1$, de modo que $r - 1 \neq 0$, tenemos:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Ejemplo concreto de aplicación de esta fórmula es el célebre problema del inventor del ajedrez a quien el rey de la India, impresionado por el invento ofreció darle lo que pidiera. Según la leyenda le pidió al rey que le diera un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y asi sucesivamente, duplicando cada vez el número de granos; el numero total que recibiría el inventor en total sería:

$$\sum_{k=0}^{63} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

¡Más de 18 millones de billones de granos de trigo!

Otro ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{101} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 2.99999999999999995080691\ldots$$

¿Qué sucederá si añadimos más términos a la progresión? Invitamos al lector a plantear sus hipótesis.

Ejercicios 1.4.1 *Notación Σ. Soluciones en la página 9*

Determinar el resultado de las siguientes sumas:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{k}{k+1}$.

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{3^i}{i}$.

3. $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ par}}}^{17} \frac{(j)^2}{j+1}$.

4. $\displaystyle\sum_{a=1}^{10} 5$.

5. $\sum_{i=0}^{6}(2i^2 - 5i)$.

6. $\sum_{k=4}^{8}(-1)^k k^2$.

7. $\sum_{i=-2}^{3}(2^i + (-1)^i i^2)$.

8. $\sum_{j=2}^{2}(4j + h)$.

9. $\sum_{k=1}^{7}\frac{3k^2 + 5}{k + 6}$.

Ejercicios 1.4.1 *Notación* Σ. *Preguntas, página 7*

1. 3.55.
2. 16.5.
3. 65.0806.
4. 50.
5. 77.
6. 42.
7. 12.75.
8. $8 + h$.
9. 40.5051.

CAPÍTULO

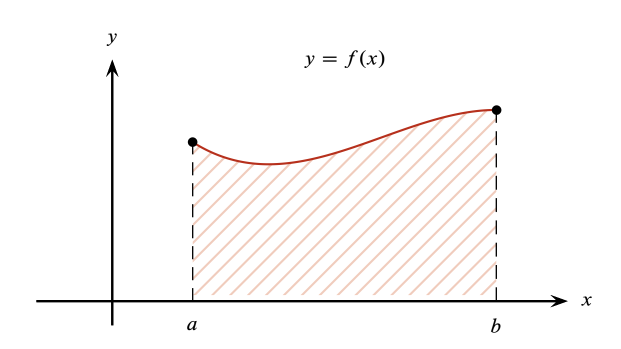
1

La integral

1.5 Definición de la integral. Sumas de Riemann

1.5.1 Aproximación del área de una región

En esta sección precisamos algunas ideas expuestas previamente, con respecto al problema de encontrar el área de la región bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ continua y no negativa, en un intervalo cerrado $[a, b]$.



- Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos $\mathcal{P} = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \}$, que cumplen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

de tal manera que el intervalo original puede descomponerse en la unión de n subintervalos:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Observe que n es el número de subintervalos en que se parte el intervalo original. El ancho de cada subintervalo, que denotaremos Δx_k, es la diferencia formada por su extremo derecho menos el izquierdo, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_0,\\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1,\\ &\vdots\\ \Delta x_n &= x_n - x_{n-1}.\end{aligned}$$

En general,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Con mucha frecuencia las particiones del intervalo $[a, b]$ que tomaremos en los ejemplos son de tal forma que los puntos consecutivos están igualmente espaciados (aunque no se requiere forzosamente que sea así), es decir, están dispuestos de tal forma que

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n},$$

y en ese caso no será necesario distinguir los Δx_k con un subíndice y escribimos simplemente Δx para indicar el ancho de cualquier subintervalo; si hay n subintervalos de igual longitud entonces es claro que cada uno tiene una longitud de:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

También podemos decir en este caso que tendremos

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_k = a + k\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x = b.$$

Así por ejemplo, para partir el intervalo $[1, 10]$ en $n = 12$ subintervalos iguales, tenemos que

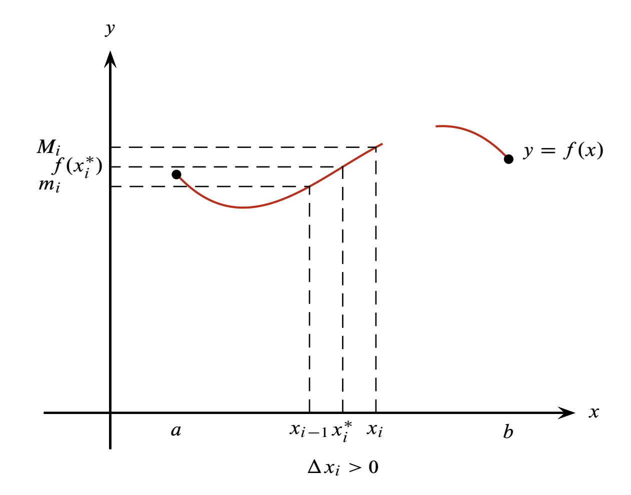
$$\Delta x = \frac{10-1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$$

y con esto se definen las x_i

$$\begin{aligned}&x_0 = 1, && x_1 = 1.75, && x_2 = 2.5, && x_3 = 3.25, && x_4 = 4, && x_5 = 4.75, && x_6 = 5.5,\\ &x_7 = 6.25, && x_8 = 7, && x_9 = 7.75, && x_{10} = 8.5, && x_{11} = 9.25, && x_{12} = 10.\end{aligned}$$

Ahora bien, para la partición dada $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ denotemos para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}m_i &= \text{mínimo de } f(x) \text{ en el subintervalo } [x_{i-1}, x_i];\\ M_i &= \text{máximo de } f(x) \text{ en el subintervalo } [x_{i-1}, x_i];\\ x_i^* &= \text{un punto del subintervalo } [x_{i-1}, x_i] \text{ elegido arbitrariamente.}\end{aligned}$$



Entonces en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$m_i \le f(x_i^*) \le M_i$$

y debido a que el ancho $\Delta x_i > 0$ de cada subintervalo es positivo:

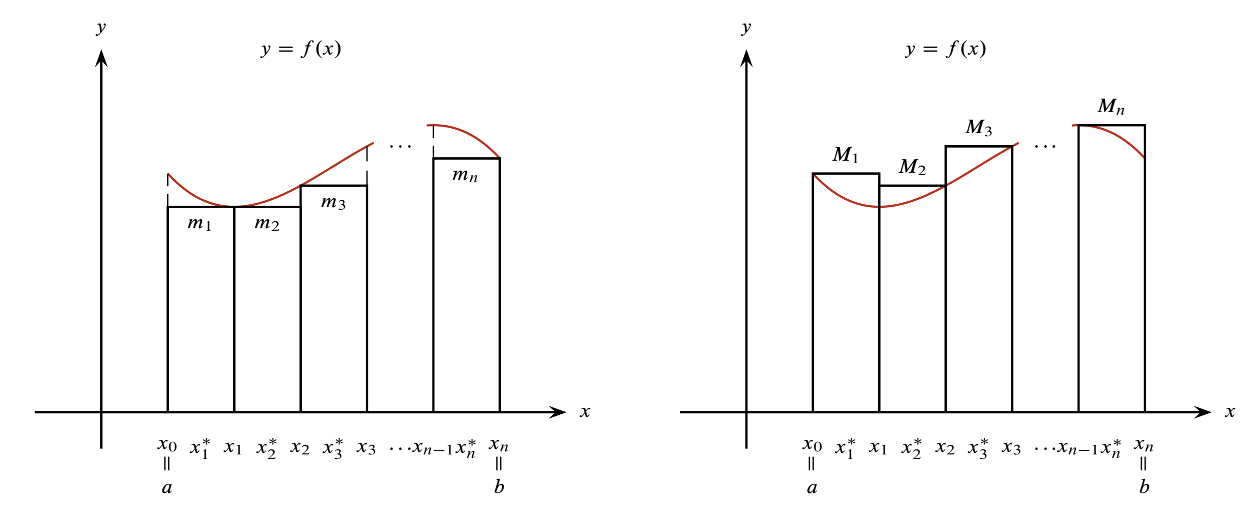
$$m_i \Delta x_i \le f(x_i^*)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Lo que en la figura se traduce en que el rectángulo de altura $f(x_i^*)$ tiene mayor área que el rectángulo de altura m_i y a la vez tiene menor área que el rectángulo de altura M_i; esto sucede en cada subintervalo. También, si sumamos las anteriores desigualdades, válidas para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ desde $i = 1$ hasta $i = n$, obtenemos:

$$m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n \le f(x_1^*)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n^*)\Delta x_n \le M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n. \tag{1.1}$$

Utilizando la notación $\sum$ para sumas podemos escribir esta doble desigualdad de manera más compacta como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.2}$$



En la doble desigualdad (1.2) podemos identificar en el extremo izquierdo la suma de áreas de los rectángulos inferiores (figura izquierda anterior) y en el extremo derecho la suma de las áreas de los rectángulos superiores (figura derecha anterior) . También se puede afirmar que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le A(R) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.3}$$

Las desigualdades (1.2) y (1.3) son similares, pero no necesariamente podemos concluir del parecido entre ellas que

$$A(R) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

sino solamente que $A(R)$ es aproximada por $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$, es decir,

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Lo que sí se puede afirmar es que, para cualquier partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$, tanto el área $A(R)$ como la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ están acotadas (limitadas) por las sumas inferior $S_I = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ y superior $S_S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

Entonces, si hacemos más fina la partición (lo que se logra añadiendo cada vez más puntos y en consecuencia teniendo subintervalos cada vez más pequeños) se espera que el valor de la suma inferior S_I aumente y el valor de la suma superior S_S disminuya, propiciando con esto que la diferencia entre esta sumas $(S_S - S_I)$ sea cada vez más pequeña y tienda a cero.

Al suceder:

$$S_I \le A(R) \le S_S; \quad S_I \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \le S_S \quad \& \quad (S_S - S_I) \longrightarrow 0,$$

se espera que $A(R)$ y la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ estén cada vez más próximos, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \longrightarrow A(R).$$

Esto es, podemos definir el área $A(R)$ de la región R mediante

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i .$$

1.5.2 Sumas de Riemann

Definición. Para una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, si x_i^* es un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ arbitrariamente elegido para $i = 1, 2, \ldots, n$, a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

se le denomina suma de Riemann para la función $y = f(x)$ con respecto a la partición $\mathcal{P}$.

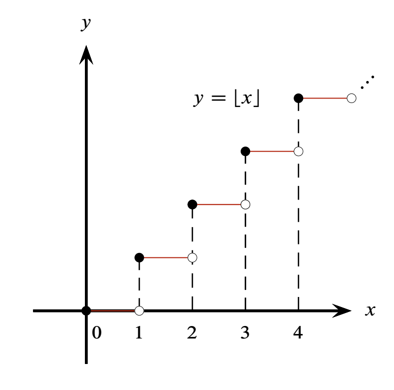
Ejemplo 1.5.1 *Calcular la suma de Riemann $A(R)$ para una función $f(x) \ge 0$ que es constante por intervalos.*

▼

1. Consideremos por ejemplo la "función máximo entero" definida para $x \in \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{máximo entero menor o igual a } x, \quad x \ge 0.$$

Cuya gráfica es



Para poder obtener un área finita tenemos que restringir el dominio de la función. Por ejemplo; el área $A(R)$, bajo $f(x)$ sobre el eje x entre 0 y 4, se obtiene tomando la partición:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4;$$

restringiendo la elección de los x_i^* a cualquier punto del subintervalo diferente al lado derecho, por ejemplo $x_i^* = x_{i-1}$. Se tiene que $\Delta x = 1$, mediante

$$A(R) = \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6.$$

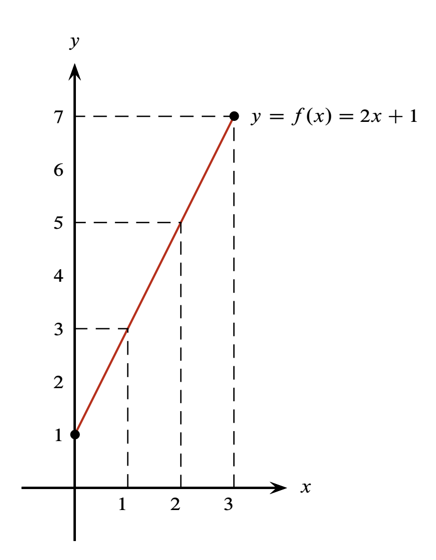
Para cualquier función escalonada, el área $A(R)$ se obtendrá tomando como puntos de la partición precisamente a los puntos en donde la función tiene sus discontinuidades. Así, en general, si $f(x) = c_i$ para $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ e $i = 1, 2, \ldots, n$, el área es

$$A(R) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

□

Ejemplo 1.5.2 *Para la función $f(x) = 2x + 1$ utilizar sumas de Riemann para aproximar el área $A(R)$ bajo su gráfica, sobre el eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 3$, eligiendo $x_i^* = x_i$; considerando:*

1. *3 subintervalos,*
2. *6 subintervalos,*
3. *n subintervalos.*



▼

1. Con 3 subintervalos de igual tamaño tenemos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; $\Delta x = \dfrac{3-0}{3} = 1$;

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{3} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\Delta x = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 3 + 5 + 7 = 15.$$

2. Con 6 subintervalos de igual longitud Δx tenemos $\Delta x = \dfrac{3-0}{6} = 0.5$, así que

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.5,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2.5,\ x_6 = 3;$$

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x = [f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2) + f(2.5) + f(3)](0.5) =$$
$$= [2+3+4+5+6+7](0.5) = 13.5.$$

3. Con n subintervalos de igual longitud Δx tenemos

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}; \quad x_i = x_0 + i\,\Delta x = 0 + i\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3i}{n};$$

$$f(x_i) = 2x_i + 1 = 2\left(\frac{3i}{n}\right) + 1 = 1 + \frac{6i}{n};$$

en consecuencia, la suma que aproxima $A(R)$ es

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n}\right)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n}\right) =$$

Hemos podido sacar $\dfrac{3}{n}$ de la sumatoria ya que es un factor constante con respecto al índice i.

$$= \frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n}\right] =$$
$$= \frac{3}{n}\left[n + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right] =$$

Se pudo sacar $\dfrac{6}{n}$ de la sumatoria ya que es un factor constante con respecto al índice i.

$$= \frac{3}{n}\left[n + \frac{6}{\not n}\,\frac{\not n(n+1)}{2}\right] =$$

Se ha usado la suma de los primeros n enteros positivos.

$$= \frac{3}{n}[n + 3(n+1)] = \frac{3}{n}(4n+3) =$$
$$= \frac{12\not n}{\not n} + \frac{9}{n} = 12 + \frac{9}{n}.$$

Observe que en esta estimación, a medida que n aumenta, el valor de la suma se aproxima a 12.

Los resultados de las sumas con $n = 3$ & $n = 6$ que calculamos antes, también se obtienen con la anterior fórmula:

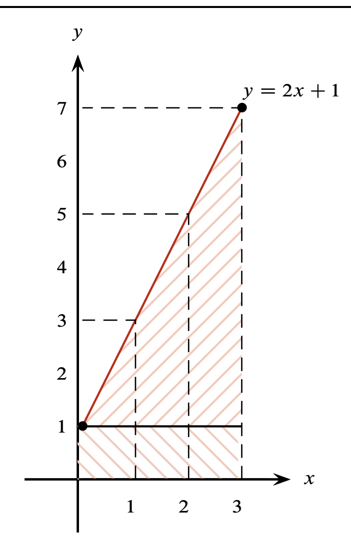
Si $n = 3$: $A(R) \approx 12 + \dfrac{9}{n} = 12 + \dfrac{9}{3} = 15$.

Si $n = 6$: $A(R) \approx 12 + \dfrac{9}{n} = 12 + \dfrac{9}{6} = 12 + 1.5 = 13.5$.

Así tenemos que tomando el límite cuando $n \to \infty$,

$$A(R) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(12 + \frac{9}{n}\right) = 12.$$

Vale la pena comentar que el área $A(R)$ se puede obtener alternativamente sumando el área de un rectángulo (base 3, altura 1) y un triángulo (base 3, altura 6), como se muestra en la siguiente figura.



□

Ejemplo 1.5.3 *Para la función $f(x) = x^2$ encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica, sobre el eje x entre $x = 0$ & $x = 2$, para un número n de subintervalos, tomando $x_i^* = x_i$.*

▼ Si usamos n subintervalos de igual longitud Δx tendremos $\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$, los x_i son

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x = 0 + i\,\Delta x = \frac{2i}{n},$$

por lo que

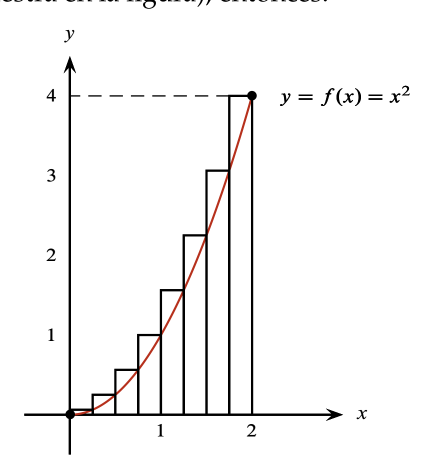
$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}.$$

Por lo tanto:

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{*}{=} \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}.$$

En la igualdad (*) anterior hemos empleado la fórmula (**??**) de la página **??** para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos.
Así por ejemplo si $n = 8$ (como se muestra en la figura), entonces:



$$A(R) \approx \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \Rightarrow A(R) \approx \frac{8}{3} + \frac{4}{8} + \frac{4}{3(8)^2} \approx 3.1875.$$

□

De nuevo podemos observar que, si al aumentar el número n de subintervalos la aproximación mejora, entonces, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ deberíamos obtener el valor real de $A(R)$. Este valor es

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Ejemplo 1.5.4 *Para la función $f(x) = x$ encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica, sobre el eje x entre $x = a$ & $x = b$, para un número n de subintervalos de igual longitud y tomando $x_i^* = x_i$ (el extremo derecho de cada subintervalo).*

▼ Si usamos n subintervalos de igual longitud Δx tendremos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y los puntos x_i son

$$x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Por lo que:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right] = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a + \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i\right] = \\
&\overset{*}{=} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na + \left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na + \frac{b-a}{2}(n+1)\right] = \\
&= (b-a)\left[\frac{na}{n} + \frac{b-a}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = \\
&= (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta x = (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]. \tag{1.4}$$

En la igualdad $(*)$ de este desarrollo hemos empleado la fórmula (**??**) de la página **??** para la suma de los primeros n naturales.

□

Ejemplo 1.5.5 *Para la función $f(x) = x^2$, obtener la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ limitada por su gráfica, sobre el eje x entre $x = a$, $x = b$, para un número n de subintervalos de igual longitud y tomando $x_i^* = x_i$ (el extremo derecho de cada subintervalo).*

▼ Si usamos n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tendremos los puntos:

$$x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Por lo que:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^2 = [a + i\Delta x]^2 = \left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^2; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[a^2 + 2ai\left(\frac{b-a}{n}\right) + i^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a^2 + \sum_{i=1}^{n} 2ai\left(\frac{b-a}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} i^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a^2 + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \\
&\overset{*}{=} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^2 + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^2 + a(b-a)(n+1) + \frac{(b-a)^2}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right] = \\
&= (b-a)\left[\frac{na^2}{n} + a(b-a)\frac{n+1}{n} + \frac{(b-a)^2}{6}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right] = \\
&= (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x = (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{1.5}$$

En la igualdad ($*$) de este desarrollo hemos utilizado las fórmulas (**??**) de la página **??** para la suma de los primeros n naturales y (**??**) de la página **??** para la suma de los cuadrados de los primeros n naturales.

□

Ejemplo 1.5.6 *Para la función $f(x) = x^3$, obtener la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica sobre el eje x, entre $x = a$, $x = b$, para un número n de subintervalos de igual longitud y tomando $x_i^* = x_i$ (el extremo derecho de cada subintervalo).*

▼ Usando n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tendremos los puntos:

$$x_i = a + i\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Por lo que:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^3 = [a + i\Delta x]^3 = \left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^3; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\left[a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^3\left(\frac{b-a}{n}\right) = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[a^3+3a^2 i\left(\frac{b-a}{n}\right)+3ai^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+i^3\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}a^3+\sum_{i=1}^{n}3a^2 i\left(\frac{b-a}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}3ai^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}i^3\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}a^3+3a^2\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}i+3a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}i^2+\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{i=1}^{n}i^3\right] = \\
&\stackrel{*}{=} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^3+3a^2\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}+3a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)(n+1)+\frac{1}{2}a(b-a)^2\frac{(n+1)(2n+1)}{n}+\frac{1}{4}(b-a)^3\frac{(n+1)^2}{n}\right] = \\
&= (b-a)\left[a^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}a(b-a)^2\frac{2n^2+3n+1}{n^2}+\frac{1}{4}(b-a)^3\frac{(n+1)^2}{n^2}\right] = \\
&= (b-a)\left[a^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}a(b-a)^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^3\Delta x = (b-a)\left[a^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}a(b-a)^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\right. \\
\left.+\frac{1}{4}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]. \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

En la igualdad ($*$) de este desarrollo hemos usado las fórmulas (**??**) de la página **??** para la suma de los primeros n naturales, (**??**) de la página **??** de los cuadrados de los primeros n naturales y (**??**) de la página **??** de los cubos del los primeros n naturales.

□

1.5.3 Definición de la integral

- **Definición.** Si $P_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, de manera que cuando $n \to \infty$ la máxima de las distancias $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tiende a 0, se define la integral definida de $f(x)$ desde a hasta b mediante

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i, \qquad (1.7)$$

siempre que el límite exista, donde x_i^* denota un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$ y donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Cuando este límite existe, se dice que f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$.

Observaciones:

1. La integral se ha definido para funciones $f(x)$ a las que no se exige que cumplan $f(x) \geq 0$.

2. La notación que se emplea para la integral fue introducida por Leibnitz, quien la representó originalmente mediante la letra S alargada (por suma); con el tiempo fue alargándose más hasta tener su forma actual. Los valores a, b se llaman extremos o límites de integración; a es el inferior, b es el superior. A la función $f(x)$ se le denomina integrando. La expresión $\mathrm{d}x$ se llama diferencial de x. El símbolo de integral $\int$, el integrando, los límites de integración $\int_a^b$ y la diferencial de x $\mathrm{d}x$ corresponden, respectivamente, al símbolo de suma ($\sum$), a los valores $f(x_i)$ de la función, a los valores mínimo y máximo del índice i ($i = 1$ hasta n) y a los anchos de los subintervalos (Δx_i). Esquemáticamente:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} & f(x_i^*) & \Delta x_i \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \displaystyle\int_a^b & f(x) & \mathrm{d}x \end{array}$$

3. El proceso mediante el cual se calcula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es algo complicado, pues involucra sumas que se deben simplificar antes de tomar el $\lim\limits_{n\to\infty}$; veremos en las secciones siguientes que existen varias formas de simplificar dicho proceso.

De toda la discusión previa podemos decir lo siguiente:

- Definición. Si $f(x) \geq 0$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el área $A(R)$ de la región del plano bajo la gráfica de $f(x)$, sobre el eje x entre $x = a$ & $x = b$ es

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 1.5.7 *Demostrar que:*

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

▼ Usando la igualdad (1.4) de la página 8 obtenida cuando se calculó la suma de Riemann de la función $f(x) = x$, tomando el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y un poco de álgebra:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta x = (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \underset{\lim\limits_{n\to\infty}}{\rightarrow} (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\right] =$$

$$= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = ab - a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2ab + a^2) = ab - a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab + \frac{1}{2}a^2 =$$

$$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

□

Ejemplo 1.5.8 *Demostrar que:*

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

▼ Usando la igualdad (1.5) de la página 9 obtenida cuando se calculó la suma de Riemann de la función $f(x) = x^2$, tomando el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y un poco de álgebra:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x = (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\lim}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\lim}} (b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \frac{1}{3}(b^2 - 2ab + a^2)\right] =$$

$$= (b-a)\left[a^2 + ab - a^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{1}{3}a^2\right] = (b-a)\left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}a^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

□

Ejemplo 1.5.9 *Demostrar que:*

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4.$$

▼ Usando la igualdad (1.6) de la página 10 obtenida cuando se calculó la suma de Riemann de la función $f(x) = x^3$, tomando el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y un poco de álgebra:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^3\Delta x = (b-a)\left[a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}a(b-a)^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\lim}} (b-a)\left[a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^3\right].$$

Si multiplicamos $(b-a)$ por cada término del factor de la derecha y colocamos términos semejantes por columnas:

$$\begin{array}{rcccccc}
(b-a)a^3 & = & & & & a^3b & -a^4; \\
(b-a)\frac{3}{2}a^2(b-a) & = & & & \frac{3}{2}a^2b^2 & -3a^3b & +\frac{3}{2}a^4; \\
(b-a)a(b-a)^2 & = & & ab^3 & -3a^2b^2 & +3a^3b & -a^4; \\
(b-a)\frac{1}{4}(b-a)^3 & = & \frac{1}{4}b^4 & -ab^3 & \frac{3}{2}a^2b^2 & -a^3b & \frac{1}{4}a^4,
\end{array}$$

obtenemos el resultado deseado: $\dfrac{1}{4}b^4 - \dfrac{1}{4}a^4$. □

Ejercicios 1.5.1 *Sumas de Riemann.* *Soluciones en la página 15*

1. Aproximar el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = x$, sobre el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 5$, utilizando una suma de Riemann. Considere 4 subintervalos de igual longitud y también $x_i^* = x_i$.

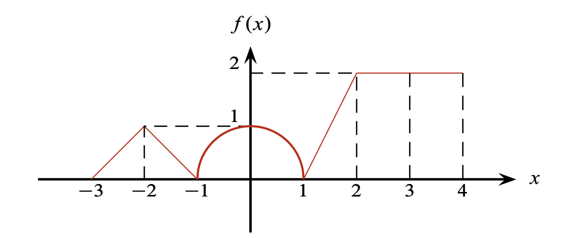
2. Aproximar el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{7}{3}$, sobre el eje x desde $x = -4$ hasta $x = 2$ utilizando una suma de Riemann. Considere 6 subintervalos de igual longitud y también $x_i^* = x_i$.

3. Aproximar el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$, sobre el eje x desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Considere 4 subintervalos de igual longitud y también $x_i^* = x_i$.

4. Para la función $f(x) = 2x$, encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ de la región R bajo su gráfica y sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 4$; use un número n de subintervalos de igual longitud. Considere $x_i^* = x_i$.

5. Encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{5} + 4$, sobre el eje x desde $x = -2$ hasta $x = 3$; use un número n de subintervalos de igual longitud. Considere $x_i^* = x_i$.

6. Dado que $A(R) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, determine las integrales que se piden para la función dada en la gráfica siguiente:



a. $\int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

d. $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

e. $\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

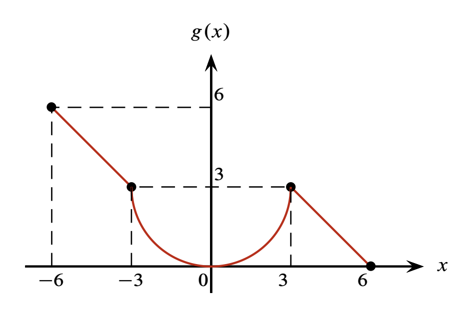
f. $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

g. $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

h. $\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

i. $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

7. Considerando la gráfica de la función $g(x)$ que se muestra a continuación, determine las integrales indicadas,



a. $\int_{-6}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_{-3}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$.

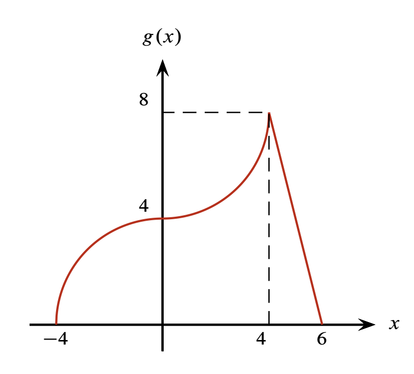
c. $\int_{0}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

d. $\int_{-3}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

e. $\int_{3}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$.

f. $\int_{-6}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$.

8. Considerando la gráfica de la función $g(x)$ que se muestra a continuación, determine las integrales indicadas,



a. $\int_{-4}^{0} h(x)\ \mathrm{d}x$.

b. $\int_{0}^{4} h(x)\ \mathrm{d}x$.

c. $\int_{4}^{6} h(x)\ \mathrm{d}x$.

d. $\int_{-4}^{6} h(x)\ \mathrm{d}x$.

9. Sea la función:

$$g(x) = \begin{cases} -x-3, & \text{si } -5 \leq x \leq -3; \\ \sqrt{9-x^2}, & \text{si } -3 < x < 3; \\ -\,|\,x-4\,|+1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Determine las integrales indicadas considerando el bosquejo de la gráfica de la función.

a. $\displaystyle\int_{-5}^{0} g(x)\ \mathrm{d}x$.

b. $\displaystyle\int_{-3}^{3} g(x)\ \mathrm{d}x$.

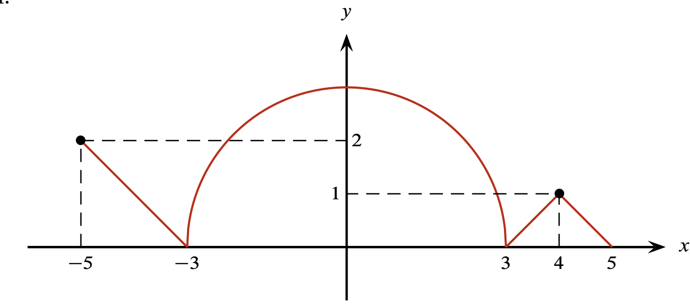
c. $\displaystyle\int_{3}^{4} g(x)\ \mathrm{d}x$.

d. $\displaystyle\int_{3}^{5} g(x)\ \mathrm{d}x$.

e. $\displaystyle\int_{-5}^{5} g(x)\ \mathrm{d}x$.

Ejercicios 1.5.1 *Sumas de Riemann.* *Preguntas, página 12*

1. 10.
2. 12.8889.
3. 10.
4. $\dfrac{16(n+1)}{n}$.
5. $\dfrac{5+41n}{2n}$.
6.
   a. $\dfrac{1}{2}$.
   b. $\dfrac{1}{2}$.
   c. $\dfrac{1}{2}\pi$.
   d. 1.
   e. 4.
   f. $\dfrac{1}{2}(1+\pi)$.
   g. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\pi$.
   h. $\dfrac{1}{4}\pi+3$.
   i. 5.
7.
   a. 13.5.
   b. 1.9314.
   c. 1.9314.
   d. 3.8628.
   e. $\dfrac{9}{2}$.
   f. 12.86.
8.
   a. 4π.
   b. $32-4\pi$.
   c. 8.
   d. 40.
9. La gráfica de la función:



   a. $2+\dfrac{9}{4}\pi$.
   b. $\dfrac{9}{2}\pi$.
   c. $\dfrac{1}{2}$.
   d. 1.
   e. $\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}\pi$.

CAPÍTULO

1

La integral

1

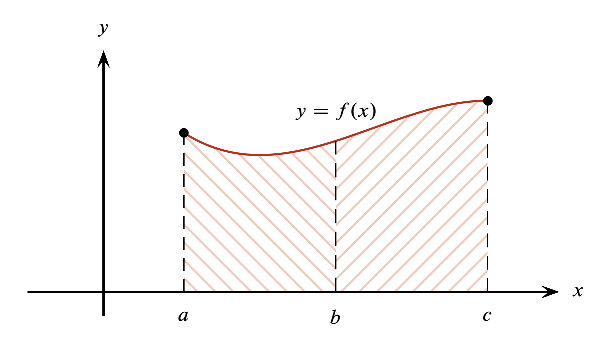
1.6 Propiedades fundamentales de la integral

En esta sección presentamos algunas propiedades básicas de la integral que facilitan su cálculo.

- *Aditividad respecto del intervalo.* Si $a < b < c$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Esta propiedad proviene de la aditividad del área y se puede ver gráficamente en la siguiente figura:



Donde el área bajo la curva $y = f(x)$ y sobre el eje x desde a hasta c es lo mismo que el área desde a hasta b, más el área desde b hasta c, dado que esas dos regiones no se traslapan y su unión forma la región desde a hasta c.
Observe que una expresión equivalente a (1.1) es

$$\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

que equivale a decir que si al área total bajo $f(x)$ entre $x = a$ & $x = c$ le restamos el área comprendida entre $x = a$ & $x = b$, entonces nos quedará sólo el área entre $x = b$ & $x = c$.

Ahora bien, hasta aquí hay un significado para el símbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ considerando que $a < b$, pero no hay un significado para el signo $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ si $a < b$. Para esto convenimos:

- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Es decir, una integral en la que el extremo inferior es un número mayor que el extremo superior es el negativo de la integral con los extremos puestos en el orden contrario (el extremo inferior menor que el extremo superior).

  Con esto ya tenemos un significado para el símbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ no importando si $a < b$ o bien si $a > b$.

Una consecuencia inmediata de esta convención es

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

  Ya que

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

  Por supuesto, también podemos concluir que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, argumentando que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área del segmento de recta bajo $f(a)$ y sobre el eje x, considerado como un rectángulo de base cero.

Ejemplo 1.6.1 *Determinar el valor de la integral* $\int_{10}^4 x^3\,\mathrm{d}x$.

▼

$$\int_{10}^4 x^3\,\mathrm{d}x = -\int_4^{10} x^3\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{10^4}{4} - \frac{4^4}{4}\right) = -(2\,500 - 64) = -2\,436.$$

□

Ejemplo 1.6.2 *Calcular el valor de la integral* $\int_5^5 (x^3 - 8x^2 + 9x)\,\mathrm{d}x$.

▼ Por la propiedad enunciada antes, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, tenemos:

$$\int_5^5 (x^3 - 8x^2 + 9x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

- *Linealidad.* Esta propiedad se puede enunciar como sigue: para funciones $f(x), g(x)$ en $[a, b]$ que se puedan integrar y constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

  Esta igualdad proviene de forma casi directa de la propia definición de la integral como límite de sumas tales como:

$$\sum_{i=1}^n [\alpha f(x_i^*) + \beta g(x_i^*)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^n [\alpha f(x_i^*)\Delta x_i + \beta g(x_i^*)\Delta x_i] = $$
$$= \alpha \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(x_i^*)\Delta x_i.$$

  Estas sumas dan lugar a las integrales en (1.3) cuando se toma el límite ($n \to \infty$).

- *Positividad.* Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

Esto es claro pues la integral es un límite de sumas de términos de la forma $f(x_i^*)\Delta x_i$, en los que tanto $f(x_i^*)$ como Δx_i son ≥ 0 y, por ser el límite de una suma de términos ≥ 0, el resultado final es ≥ 0.

- *Monotonía.* Si $f(x) \geq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Como $f(x) - g(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Estas propiedades se han utilizado implícitamente con anterioridad, por ejemplo, cuando se hizo la estimación de que, si $m \leq f(x) \leq M$ en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Las expresiones $m(b-a)$, $M(b-a)$, pueden interpretarse como integrales de las funciones constantes m & M respectivamente, pues como se observó antes y podemos ver ahora a partir de la definición, para cualquier constante C y partición $P = \{\, a = x_0 < x_1 < \ \ldots\ < x_n = b \,\}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b C\ \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[C \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\right] = \\ &= C \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = C \cdot \lim_{n\to\infty}(x_n - x_0) = C \cdot \lim_{n\to\infty}(b-a) = \\ &= C \cdot (b-a).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.3 *Evaluar la integral* $\int_1^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

▼ Usando linealidad:

$$\int_1^4 (2x+1)\ \mathrm{d}x = 2\int_1^4 x\ \mathrm{d}x + \int_1^4\ \mathrm{d}x = 2\left(\frac{4^2 - 1^2}{2}\right) + (4-1) = 18.$$

□

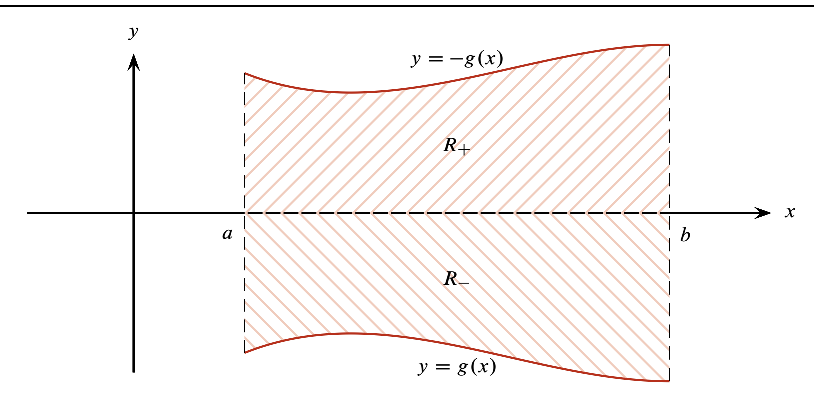
Ejemplo 1.6.4 *Calcular la integral* $\int_0^5 (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x$.

▼ De nuevo por la linealidad,

$$\int_0^5 (x^2 - 3x + 2)\ \mathrm{d}x = \int_0^5 x^2\ \mathrm{d}x - 3\int_0^5 x\ \mathrm{d}x + 2\int_0^5\ \mathrm{d}x = \frac{5^3}{3} - 3\left(\frac{5^2}{2}\right) + 2(5) = \frac{125}{3} - \frac{75}{2} + 10 = \frac{85}{6}.$$

□

- *Convención para funciones negativas.* Hasta el momento hemos considerado el cálculo del área de regiones bajo la gráfica de una función $f(x) \geq 0$ con gráfica sobre el eje x. Sin embargo, la definición de la integral de una función como límite de sumas no implica que las funciones deban ser positivas. Si una función $g(x)$ es negativa en todo un intervalo $[a, b]$, entonces es claro que su negativa $-g(x)$ es positiva en el mismo intervalo.



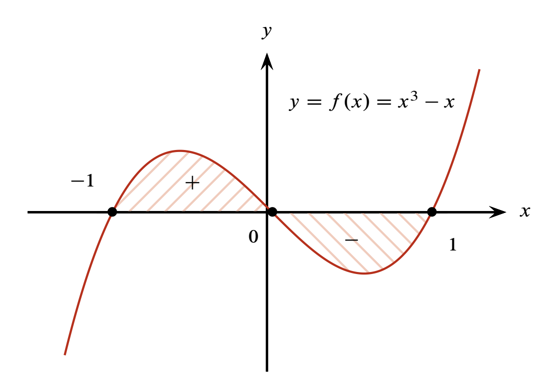
La gráfica de $-g(x)$ es el reflejo de $g(x)$ con respecto al eje x, de manera que el área de la región R_+ entre la gráfica de $-g(x)$ y, el eje x mide lo mismo que el área de la región R_- entre la gráfica de $g(x)$ y el eje x. Además, el área encima del eje x es

$$A(R_+) = \int_a^b -g(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b g(x) = -A(R_-).$$

Donde identificamos, como parece razonable, a $A(R_-)$ con $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$, lo que nos lleva de manera natural a tomar la convención de que las áreas de regiones debajo del eje x se deben considerar como negativas.

En general, las áreas de regiones por encima del eje x se toman con signo positivo y las regiones por debajo del eje x con signo negativo. De aquí que, en el contexto de áreas, la integral definida $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ es una suma algebraica de áreas cuyo resultado puede ser positivo, negativo o cero.

Ejemplo 1.6.5 *Calcular* $\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x$ *de la siguiente figura.*



▼ De acuerdo con la convención anterior, la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x$ para la función $f(x) = x^3 - x$ es cero, porque (véase figura) dicha función tiene una gráfica simétrica con respecto al origen, por ser una función impar, y corta al eje x en -1, 0 y en 1.

- El área entre la gráfica y el eje x de $\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$ se toma con signo $+$.
- El área entre la gráfica y el eje x de $\int_{0}^{1} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$ se toma con signo $-$.
- Por simetría, las áreas son iguales, por lo tanto $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x = 0$.

□

A continuación enunciamos dos resultados importantes de la integral definida.

Teorema 1.1 *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe la integral definida*

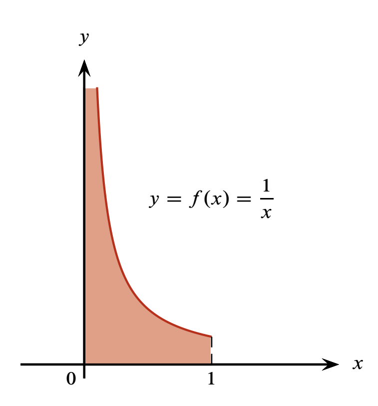
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Esto es, toda función continua es integrable en intervalos cerrados y acotados.
Si la función no es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, no se puede asegurar la existencia de la integral definida $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Ejemplo 1.6.6 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en el intervalo $[0, 1]$.*

▼ $f(0) \notin \mathbb{R}$ (no está definido) y además

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$



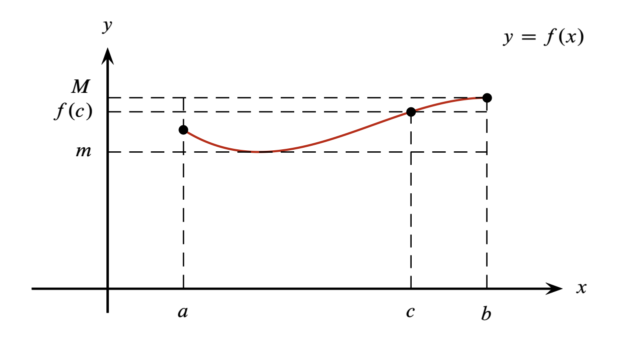
Aquí, no se puede asegurar la existencia de la integral definida:

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x.$$

□

Teorema 1.2 *Del valor medio para integrales. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe al menos un punto c en el intervalo $[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(c)(b - a).$$



Esta propiedad establece un hecho que se puede deducir de la figura anterior. La función tiene un valor mínimo m y un máximo M, por ser continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, dado que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura m se encuentra contenido en la región R bajo $f(x)$, sobre el eje x, y entre $x = a$, $x = b$, a la vez esta región R queda inscrita dentro del rectángulo con la misma base y altura M, vemos:

$$m(b-a) \leq A(R) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

También se puede escribir, de manera equivalente,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M.$$

Ahora bien, por el teorema del Valor Intermedio para funciones continuas, dado que el número

$$\gamma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

se encuentra entre m & M, y dado que f es continua, existe al menos un punto c en el intervalo $[a, b]$ de manera que $f(c) = \gamma$. Es decir,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{o bien} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Al número $f(c)$ se le denomina valor promedio de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Por esto, podemos decir que toda función continua tiene un valor promedio en cualquier intervalo cerrado.

Ejemplo 1.6.7 *Encontrar el valor promedio de $f(x) = x^k$ para $k = 1, 2, 3$ en el intervalo $[0, a]$.*

▼

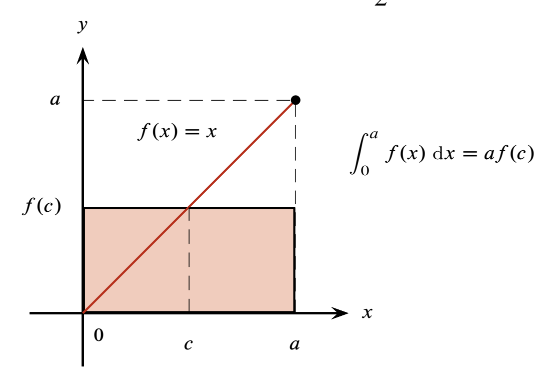
1. Para la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, a]$:

$$\int_0^a x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

El valor promedio buscado es una $f(c)$ con c en $[0, a]$ que cumple

$$f(c) = \frac{1}{a-0}\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a}{2}.$$

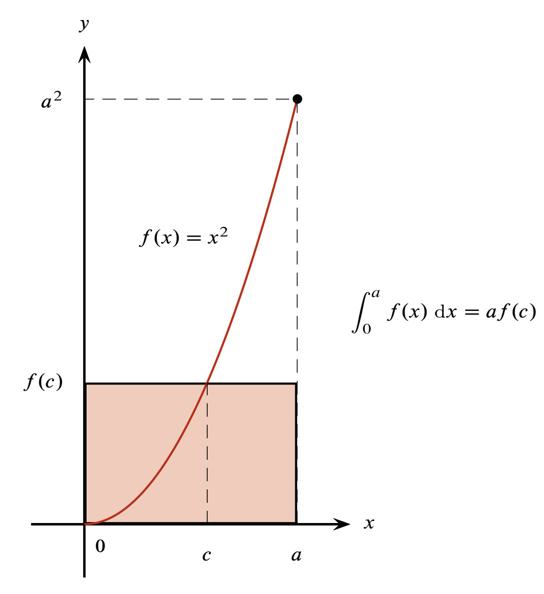
Dado que $f(x) = x$, dicho valor promedio se obtiene cuando $c = \dfrac{a}{2}$.



2. El valor promedio para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ debe cumplir

$$f(c) = \frac{1}{a-0}\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2}{3}.$$

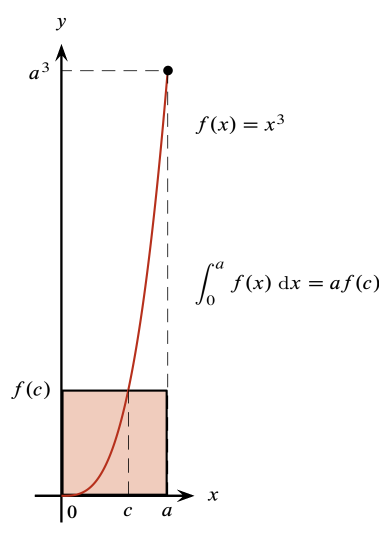
Por lo tanto, como $f(x) = x^2$, se debe cumplir $c^2 = \frac{a^2}{3}$, de donde $c = \frac{a}{\sqrt{3}}$ es el punto en el que $f(c) = \frac{a^2}{3}$.



3. Para la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, a]$ el valor promedio $f(c)$ debe satisfacer

$$f(c) = \frac{1}{a-0}\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x^3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^3}{4}.$$

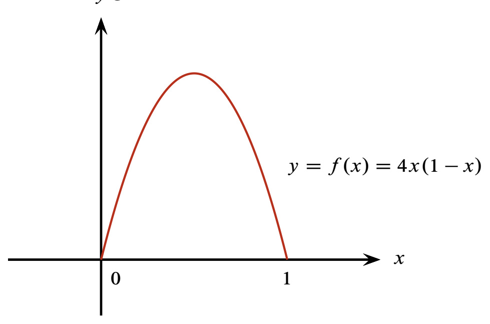
El punto c donde se obtiene dicho valor cumple $c^3 = \frac{a^3}{4}$, de donde $c = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$ es el punto en el que $f(c) = \frac{a^3}{4}$.



□

Ejemplo 1.6.8 *Encontrar el valor promedio de la función* $f(x) = 4x(1-x)$ *en el intervalo* $[0, 1]$ *y el o los puntos* c *en que se cumple* $f(c) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

▼ La gráfica de la función se muestra en la figura:



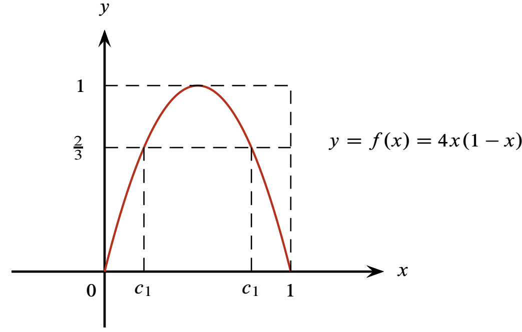
Se debe cumplir para el punto c:

$$f(c) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4x(1-x)\,dx = \int_0^1 (4x-4x^2)\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 x\,dx - 4\int_0^1 x^2\,dx = 4\left(\frac{1^2}{2}\right) - 4\left(\frac{1^3}{3}\right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Es decir, $f(c) = 4c(1-c) = \frac{2}{3}$, así que $c - c^2 = \frac{1}{6}$ o bien $c^2 - c + \frac{1}{6} = 0$.

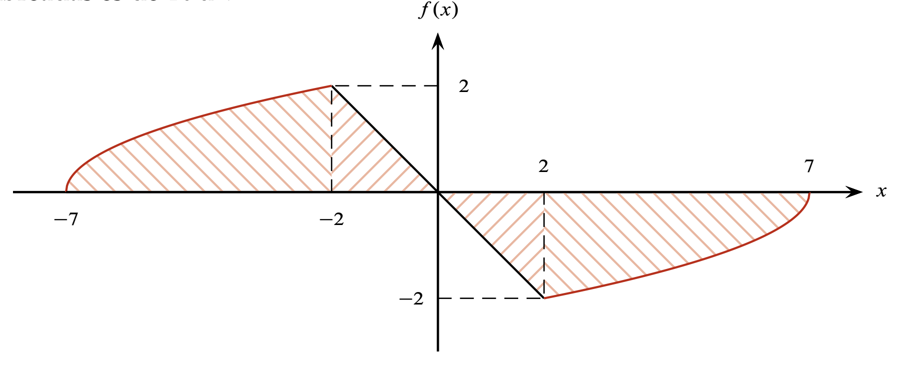
Entonces, $c = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-\frac{4}{6}}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$, de modo que el valor promedio es $\frac{2}{3}$ y se alcanza en los puntos $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$; $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.



□

Ejercicios 1.6.1 *Propiedes de la integral.* *Soluciones en la página 14*

1. En el plano se representa el bosquejo de la gráfica de la función impar $f(x)$. El área de todas las regiones sombreadas es de $16\,u^2$.



Calcular:

a. $\displaystyle\int_{-7}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\displaystyle\int_{-7}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$;

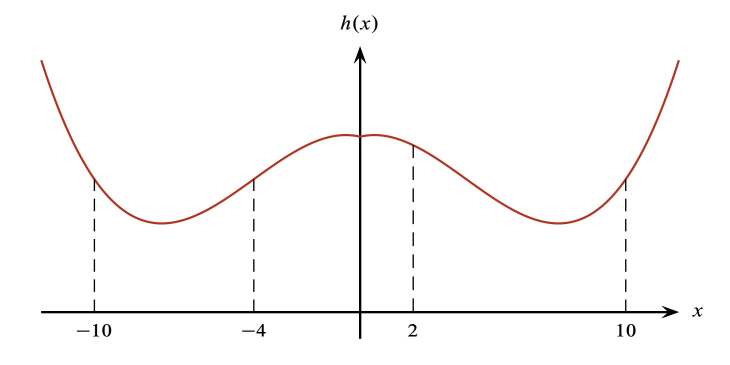
c. $\displaystyle\int_{-2}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{-7}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

f. $\displaystyle\int_{0}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Considere el bosquejo de la gráfica de la función par $h(x)$ que se muestra a continuación:



Obtener las siguientes integrales si:

$$\int_{-10}^{10} h(x)\,\mathrm{d}x = 28 \quad \& \quad \int_{-4}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x = 6.$$

a. $\displaystyle\int_{0}^{10} h(x)\,\mathrm{d}x$;

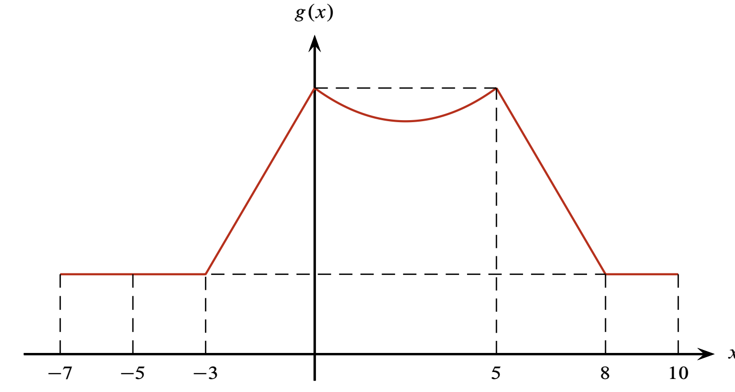
b. $\displaystyle\int_{4}^{10} h(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\displaystyle\int_{-4}^{-10} h(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{-4}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\displaystyle\int_{-10}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Dado el bosquejo de la gráfica de la función definida por partes $g(x)$:



Considere:

$$\int_{-3}^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x = -4, \int_{0}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x = -9 \quad \& \quad \int_{-7}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x = 45.$$

Calcule:

a. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x$;

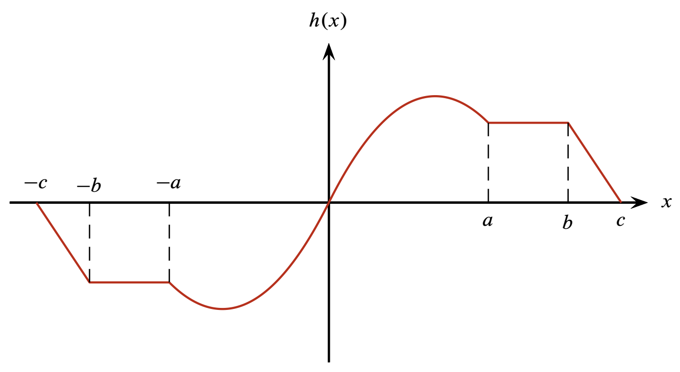
b. $\displaystyle\int_{-3}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\displaystyle\int_{8}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{10}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\displaystyle\int_{0}^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Considere el bosquejo de la gráfica de la función impar definida por partes $h(x)$ que se muestra a continuación.



Obtenga:

a. $\displaystyle\int_{0}^{c} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-b}^{-a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-c}^{-b} h(x)\,\mathrm{d}x$;

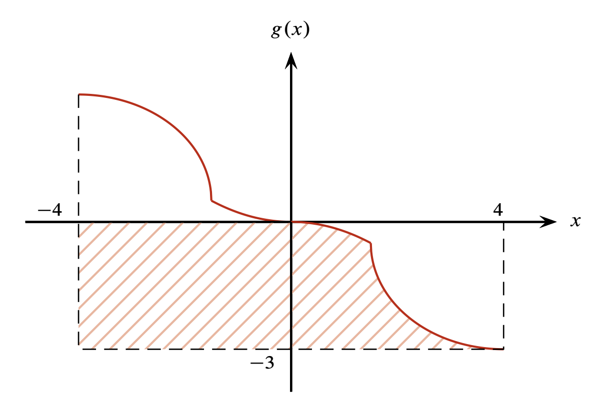
b. $\displaystyle\int_{-c}^{-a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\displaystyle\int_{0}^{-a} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-a}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{a}^{c} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{-c} h(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\displaystyle\int_{b}^{-b} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{c} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-b}^{-c} h(x)\,\mathrm{d}x$.

5. El bosquejo presentado es de la gráfica de la función impar $g(x)$. El área de la región sombreada es de $18\,\mathrm{u}^2$.



Calcule las siguientes integrales:

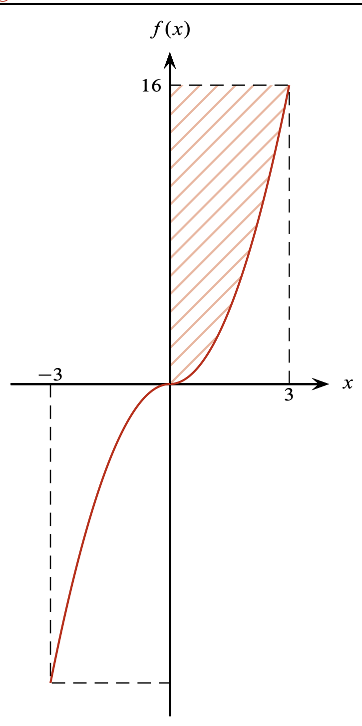
a. $\displaystyle\int_{-4}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\displaystyle\int_{0}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\displaystyle\int_{-4}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{0}^{-4} g(x)\,\mathrm{d}x$.

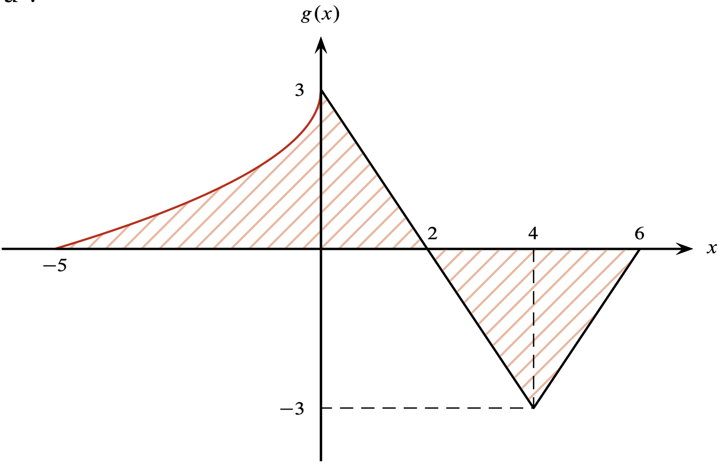
6. El plano muestra el bosquejo de la gráfica de la función impar $f(x)$. El área de la región sombreada es de $18\,\mathrm{u}^2$.



Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$; b. $\displaystyle\int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x$; c. $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$; d. $\displaystyle\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

7. En el plano se presenta el bosquejo de la gráfica de la función $g(x)$. El área de todas las regiones sombreadas es de $13\,\mathrm{u}^2$.

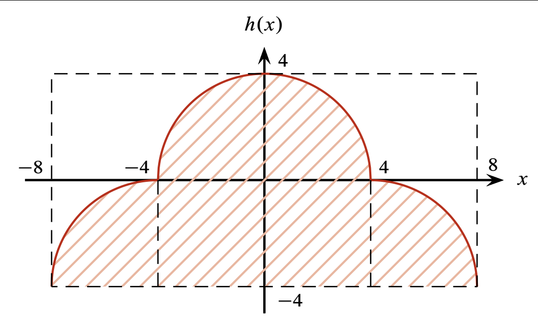


Calcule:

a. $\displaystyle\int_0^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x$; c. $\displaystyle\int_{-5}^6 g(x)\,\mathrm{d}x$; e. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$; g. $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\displaystyle\int_4^6 g(x)\,\mathrm{d}x$; d. $\displaystyle\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$; f. $\displaystyle\int_{-5}^2 g(x)\,\mathrm{d}x$; h. $\displaystyle\int_4^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x$.

8. En el siguiente plano se muestra el bosquejo de la gráfica de la función par $h(x)$. El área de la región sombreada es de $16(\pi+2)\,\mathrm{u}^2$.



Obtenga el resultado de las siguientes integrales:

a. $\int_{4}^{8} h(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\int_{-4}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\int_{0}^{-4} h(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\int_{-8}^{-4} h(x)\,\mathrm{d}x$;

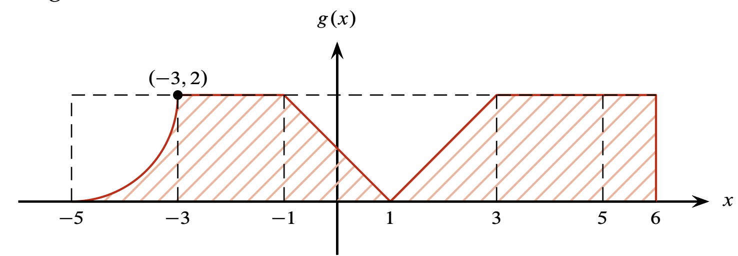
e. $\int_{-8}^{8} h(x)\,\mathrm{d}x$;

f. $\int_{-4}^{-8} h(x)\,\mathrm{d}x$;

g. $\int_{-4}^{8} h(x)\,\mathrm{d}x$;

h. $\int_{0}^{-8} h(x)\,\mathrm{d}x$.

9. Calcule el área de las región sombreada.



Y obtenga el resultado de las siguientes integrales:

a. $\int_{-5}^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\int_{3}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x$;

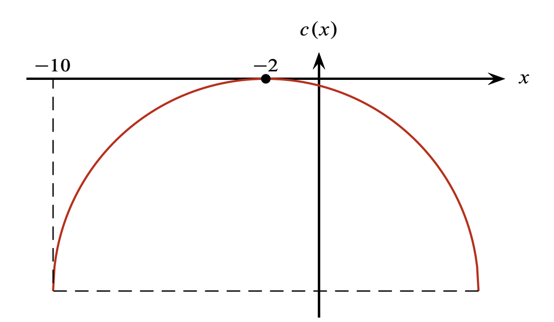
c. $\int_{1}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\int_{1}^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\int_{-3}^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x$;

f. $\int_{-5}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Considerando la gráfica de la semicircunferencia $c(x)$, calcule las siguientes integrales:



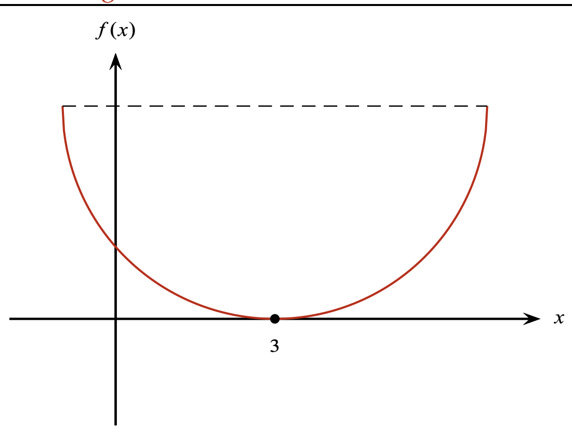
a. $\int_{-2}^{-10} c(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\int_{-2}^{6} c(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\int_{6}^{-10} c(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\int_{-10}^{6} c(x)\,\mathrm{d}x$.

11. Considerando el bosquejo de la gráfica de una semicircunferencia $f(x)$ con un radio de 4 u,



calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$; b. $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$; c. $\displaystyle\int_{3}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$; d. $\displaystyle\int_{7}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

12. Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_{1}^{8} (3t-2)\ \mathrm{d}t$.

b. $\displaystyle\int_{2}^{6} (x^2-3x+5)\ \mathrm{d}x$.

c. $\displaystyle\int_{0}^{3} (4y^3-2y+7)\ \mathrm{d}y$.

13. Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3+4x)\ \mathrm{d}x$.

b. $\displaystyle\int_{-5}^{5} 7x^5\ \mathrm{d}x$.

c. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^7-3x^5+2x^3-10x)\ \mathrm{d}x$.

14. Encuentre el valor promedio de las siguientes funciones en los intervalos dados:

a. $f(x)=3x^2$ en $[1,6]$.

b. $f(x)=3x-2$ en $[-1,3]$.

c. $f(x)=x^k$ en $[a,b]$ para $k=1,2,3$ con $0<a<b$.

Ejercicios 1.6.1 *Propiedes de la integral.* *Preguntas, página 8*

1. a. 6. b. 16. c. −6. d. 8. e. −2. f. −8.

2. a. 14. b. 8. c. −8. d. 12. e. 20.

3. a. 8. b. 24. c. −9. d. $8+4=12$. e. $-13+13=0$.

4. a. $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. $\int_b^c h(x)\,\mathrm{d}x$.
   c. $3\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   d. $2\int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x$.
   e. $2\int_b^c h(x)\,\mathrm{d}x$.

5. a. 6. b. 6. c. 0. d. −6.

6. a. 30. b. 30. c. 0. d. −30.

7. a. −4. b. 3. c. 1. d. 6. e. 3. f. 7. g. −1. h. −4.

8. a. $16-4\pi$. b. 8π. c. -4π. d. $16-4\pi$. e. 32. f. $4\pi-16$. g. $16+4\pi$. h. −16.

9. a. $8-\pi$. b. 4. c. 10. d. −2. e. $\pi-4$. f. $20-\pi$.

10. a. $64-16\pi$. b. $16\pi-64$. c. $32\pi-128$. d. $128-32\pi$.

11. a. $16-4\pi$. b. $32-8\pi$. c. $16-4\pi$. d. $4\pi-16$.

12. a. 76.5.
    b. 41.3333.
    c. 93.

13. a. 0.
    b. 0.
    c. 0.

14. a. $c=2.6458$.
    b. $c=2$.
    c. $f(x)=x^k$ en $[a,b]$ para $k=1,2,3$ con $0<a<b$.
       i. Para $x=1$, $c=\frac{1}{2}(b+a)$.
       ii. Para $x=2$, $c=\sqrt{\frac{b^2+ab+a^2}{3}}$.
       iii. Para $x=3$, $c=\sqrt[3]{\frac{b^3+ab^2+a^2b+a^3}{4}}$.

CAPÍTULO

1

La integral

1.7 Teorema Fundamental del Cálculo I

Presentamos la primera parte del teorema Fundamental del Cálculo (TFC I), teorema importante que permite calcular integrales definidas de manera directa. Además, este teorema revela la relación que existe entre los procesos de derivación e integración; Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Leibnitz (1646–1726) descubrieron y publicaron de manera independiente este resultado, por lo que se les considera los padres fundadores del cálculo. Comenzaremos aquí por estudiar lo que sucede al integrar la derivada de una función conocida.

Para obtener el resultado que buscamos haremos uso del teorema del Valor Medio para derivadas, por lo que conviene recordar su enunciado:

Teorema 1.1 *Del Valor Medio para Derivadas. Si* $y = F(x)$ *es una función continua en un intervalo* $[a, b]$ *y diferenciable para todo punto en su interior* (a, b)*, entonces para algún número* $c \in [a, b]$*:*

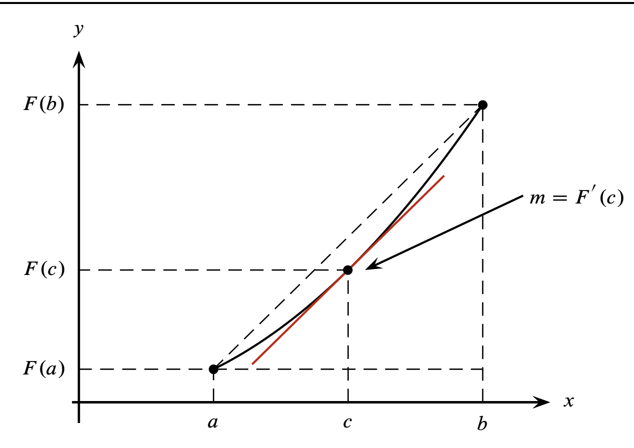
$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c),$$

o equivalentemente:

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a).$$

La siguiente figura refleja el resultado de este teorema:

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017



Si bien el teorema del Valor Medio no dice en donde exactamente se encuentra el punto c que cumplirá la igualdad anterior, sí garantiza que tal punto c existe y se encuentra dentro del intervalo, es decir, $a \le c \le b$. Supongamos ahora que $y = F(x)$ es una función continua y diferenciable en un intervalo $[a, b]$ y consideremos una partición cualquiera

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

del intervalo $[a, b]$. Entonces podemos escribir, usando una suma telescópica:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \ldots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Como $F(x)$ es continua y diferenciable en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el teorema del Valor Medio garantiza que existe en dicho subintervalo un x_i^* tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}),$$

de modo que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(x_i^*)\Delta x_i; \tag{1.1}$$

esta última es una suma de Riemann que, al tomar el límite sobre particiones que cumplan

$$n \to \infty \;\&\; \Delta x_i \to 0, \text{ converge a la integral } \int_a^b F'(x)dx.$$

Dado que el extremo izquierdo de las igualdades (1.1) no depende de la partición (o de n), concluimos:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

Resulta conveniente reescribir el resultado anterior como sigue:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Para referencias futuras escribimos a continuación el enunciado del teorema Fundamental del Cálculo.

- Teorema Fundamental del Cálculo, primera parte (TFC I)

  Sea la función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$. Si $F(x)$ es una función definida y diferenciable en $[a, b]$ tal que

  $$F'(x) = f(x),$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.2}$$

A la función $F(x)$ se le denomina primitiva o antiderivada de $f(x)$, por la relación que guarda con la función del integrando.

Ejemplo 1.7.1 *Demostrar que las funciones* $F_1(x) = 2x^2 + 1$ & $F_2(x) = 2x^2 - 5$ *son primitivas de* $f(x) = 4x$*; emplearlas para calcular* $\int_0^4 f(x)\ \mathrm{d}x$.

▼ Para comprobar, solo tenemos que derivar:

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = \frac{d}{dx}(2x^2+1) = 4x = f(x) \quad \& \quad \frac{d}{dx}F_2(x) = \frac{d}{dx}(2x^2-5) = 4x = f(x).$$

Observe que la diferencia entre $F_1(x)$ & $F_2(x)$ es una constante:

$$F_1(x) - F_2(x) = (2x^2+1) - (2x^2-5) = 6.$$

Ahora, la integral pedida es, usando $F_1(x)$:

$$\int_0^4 f(x)\ \mathrm{d}x = F_1(x)\Big|_0^4 = (2x^2+1)\Big|_0^4 = [2(4)^2+1] - [2(0)^2+1] = [32+1] - [1] = 32+1-1 = 32.$$

Obtenemos el mismo resultado usando $F_2(x)$:

$$\int_0^4 f(x)\ \mathrm{d}x = F_2(x)\Big|_0^4 = (2x^2-5)\Big|_0^4 = [2(4)^2-5] - [2(0)^2-5] = [32-5] - [-5] = 32-5+5 = 32.$$

□

La utilidad del TFC I estriba en que con su ayuda podemos evaluar la integral definida de cualquier función para la cual conozcamos (o podamos encontrar) una primitiva. El siguiente resultado debe tenerse en cuenta:

- Si $F(x)$ y si $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) - G(x) = C$.
  ▼ Como $F' = f(x)$ y $G' = f(x)$, la función $h(x) = F(x) - G(x)$ cumple:

$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C \Rightarrow F(x) - G(x) = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x) = G(x) + C.$$

□

Todas las fórmulas de diferenciación nos pueden servir para encontrar dichas primitivas y evaluar integrales como se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7.2 *Sabiendo que* $F(x) = 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow F'(x) = 6x - 8$, *calcular* $\int_{-3}^2 (6x-8)\ \mathrm{d}x$.

▼

$$\int_{-3}^2 (6x-8)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^2 F'(x)\ \mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-3}^2 = F(2) - F(-3) =$$
$$= [3(2)^2 - 8(2) + 5] - [3(-3)^2 - 8(-3) + 5] = [12 - 16 + 5] - [27 + 24 + 5] = -55.$$

□

Ejemplo 1.7.3 *La derivada de* $F(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ *es* $F'(x)=\dfrac{(x-2)2x-(x^2-1)\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$; *calcular* $\displaystyle\int_3^6 \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$.

▼

$$\int_3^6 \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_3^6 F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_3^6=F(6)-F(3)=$$
$$=\frac{6^2-1}{6-2}-\frac{3^2-1}{3-2}=\frac{36-1}{4}-\frac{9-1}{1}=\frac{35}{4}-8=\frac{3}{4}.$$

Vale la pena aclarar que el integrando $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ es una función no acotada en $x=2$, así que no podemos aplicar el TFC I en un intervalo que contenga $x=2$. Se debe verificar, al aplicar el TFC-I, que el integrando sea una función continua en todo el intervalo de integración para evitar resultados contradictorios, como se muestra en el siguiente ejemplo.

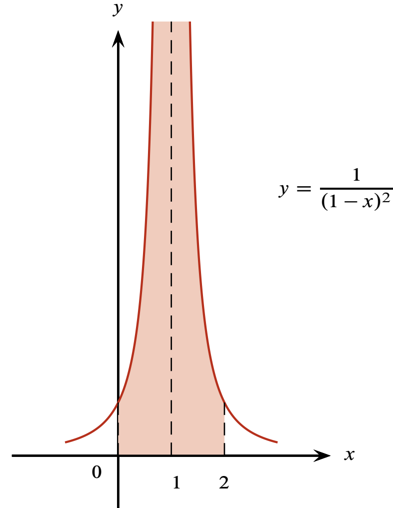
□

Ejemplo 1.7.4 *La función* $F(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$ *es primitiva de* $F'(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$; *calcular* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Si aplicamos el TFC I sin poner atención a las hipótesis del teorema, obtenemos:

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1-x}\Big|_0^2=\frac{1}{1-2}-\frac{1}{1-0}=-1-1=-2.$$

El resultado anterior es incorrecto. Veamos por qué. La función del integrando $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ tiene la gráfica siguiente:



Si interpretamos la integral como un área, el resultado que calculamos nos dice que el área bajo la curva sobre el eje x entre $x=0$ & $x=2$ es -2, cuando en realidad o bien no está definida, o bien es infinita. La explicación de esta contradicción es que el integrando es una función con una discontinuidad de tipo infinito en $x=1$, valor que queda dentro del intervalo de integración. En este caso no es posible aplicar el TFC I.

□

Ejemplo 1.7.5 *Calcular* $\int_2^5 (3x^2 - 2x + 1)\ \mathrm{d}x$.

▼ La función $F(x) = x^3 - x^2 + x$ es una primitiva del integrando, pues $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, por lo tanto:

$$\int_2^5 (3x^2 - 2x + 1)\ \mathrm{d}x = (x^3 - x^2 + x)\Big|_2^5 = (5^3 - 5^2 + 5) - (2^3 - 2^2 + 2) =$$
$$= (125 - 25 + 5) - (8 - 4 + 2) = 105 - 6 = 99.$$

□

A diferencia de los ejemplos anteriores, en este último se pide calcular una integral sin hacer referencia previa a una función primitiva; esta se obtuvo basándonos en conocimientos previos sobre derivadas, a saber

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2; \quad \frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \& \quad \frac{d}{dx}x = 1,$$

junto con la conocida propiedad de que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas. Este tipo de razonamiento es el que usaremos en lo sucesivo para calcular integrales; buscaremos en cada caso una primitiva, usando diferentes medios a nuestro alcance y terminaremos evaluando $F(x)\Big|_a^b$. Para encontrar la función primitiva, necesitamos desarrollar cierta habilidad, la cual se consigue partiendo de un conocimiento completo de las fórmulas de derivación aunado a una sistematización de técnicas que se presentarán en las secciones y capítulos siguientes. Por el momento cerramos esta sección presentando dos resultados elementales que nos permitirán integrar por lo menos cualquier función polinomial.

- Integración de funciones potencia

  Si $f(x) = x^k$ con $k \neq -1$ y si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ es una primitiva de $f(x)$.

  ▼ Al derivar vemos:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{1}{k+1}(k+1)x^k = x^k.$$

□

En consecuencia,

$$\int_a^b x^k\ \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1};\ \text{con } k \neq -1. \tag{1.3}$$

Observe que esta fórmula es válida para todo exponente $k \neq -1$ (aún cuando k sea racional, negativo o irracional). La única condición es que $f(x) = x^k$ sea continua en todo el intervalo $[a, b]$. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.7.6 *Las siguientes integrales se evalúan por aplicación directa de la integración de funciones potencia:*

▼

1. $\displaystyle\int_2^7 x^3\ \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_2^7 = \frac{7^4 - 2^4}{4} = \frac{2\,401 - 16}{4} = \frac{2\,385}{4} = 596.25\,.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^3 x^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^3 = \frac{3}{4}\left(3^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3^{\frac{7}{3}} - 3}{4}.$

3. $\displaystyle\int_3^5 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_3^5 = 2\left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right) = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$

4. $\displaystyle\int_1^{10} x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\Big|_1^{10} = \frac{10^{\sqrt{2}+1}-1^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} = \frac{10^{\sqrt{2}+1}-1}{\sqrt{2}+1}.$

5. $\displaystyle\int_2^4 x^{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}\Big|_2^4 = \frac{4^{\pi+1}-2^{\pi+1}}{\pi+1}.$

□

Ejemplo 1.7.7 *Cuando el exponente k en $f(x) = x^k$ sea negativo, es preciso cuidar que el intervalo de integración no contenga 0, donde esta función es no acotada. Así por ejemplo las integrales 1. y 2. siguientes son correctas, pero la 3. no lo es:*

▼

1. $\displaystyle\int_2^3 x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_2^3 = -\frac{1}{2}(3^{-2}-2^{-2}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right) =$
$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4-9}{36}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{36}\right) = \frac{5}{72}.$

2. $\displaystyle\int_9^{25} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_9^{25} = -2(25^{-\frac{1}{2}}-9^{-\frac{1}{2}}) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{25}}-\frac{1}{\sqrt{9}}\right) =$
$\displaystyle= -2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{3-5}{15}\right) = -2\left(-\frac{2}{15}\right) = \frac{4}{15}.$

3. $\displaystyle\int_{-2}^1 x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-2}^1 = -(1^{-1}-(-2)^{-1}) = -\left(1-\frac{1}{-2}\right) = -\left(1+\frac{1}{2}\right) =$
$\displaystyle= -\frac{3}{2}.$

Este último resultado es incorrecto. ¿Puede el lector explicar por qué?

□

Por la propiedad de linealidad enunciada en la sección anterior, para funciones integrables $f(x)$, $g(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$ y constantes r, s cualesquiera:

$$\int_a^b [rf(x)+sg(x)]\,\mathrm{d}x = r\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + s\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2-10x+7)\,\mathrm{d}x &= 3\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x - 10\int_1^2 x\,\mathrm{d}x + 7\int_1^2 \mathrm{d}x = \\ &= \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_1^2 - 10\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 7x\Big|_1^2 = \\ &= (2^3-1^3) - 5(2^2-1^2) + 7(2-1) = \\ &= 7-15+7 = -1.\end{aligned}$$

Es posible integrar un polinomio sobre cualquier intervalo, o bien una suma de potencias (distintas de -1) sobre un intervalo en donde sea continua usando la fórmula:

$$\int_a^b (rx^k+sx^\ell)\,\mathrm{d}x = \left(r\frac{x^{k+1}}{k+1}+s\frac{x^{\ell+1}}{\ell+1}\right)\Big|_a^b.$$

Por ejemplo:

$$\int_4^9 (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Big|_4^9 =$$

$$= \left[\frac{9^3}{3} - \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{4^3}{3} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right] = 225 - 16 = 209.$$

Ejercicios 1.7.1 *TFC I.* *Soluciones en la página 8*

Calcule las integrales siguientes utilizando la linealidad y la integral de funciones potencias:

1. $\displaystyle\int_0^5 (3\sqrt{x} + 5x^3)\ \mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^{\frac{1}{3}} - x^3)\ \mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_2^{10} \frac{x^2 - 1}{x - 1}\ \mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_3^7 \frac{x^3 - 8}{x - 2}\ \mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^3 + 27}{x + 3}\ \mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}\ \mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}\ \mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_3^1 \frac{\sqrt{x}(x^2 - 3x + 2)}{x - 2}\ \mathrm{d}x$.
10. $\displaystyle\int_3^1 \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}(x - 2)}\ \mathrm{d}x$.

Calcule el área comprendida entre el eje x y la gráfica de la función entre los límites indicados:

11. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, entre $x = 1$ & $x = 8$.
12. $g(x) = x^5 - 3x^3$, entre $x = -2$ & $x = 2$.
13. $h(x) = 4x^2 + 2x^4$, entre $x = -1$ & $x = 1$.
14. $\Phi(x) = ax^n$ con n un número natural impar, entre $x = -a$ & $x = a$.

Compruebe las fórmulas de derivación propuestas y complete la fórmula de integración; indique las condiciones necesarias sobre el intervalo $[a, b]$, para su validez.

15. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)}\ \mathrm{d}x$.
16. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1}\right) = \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}\ \mathrm{d}x$.
17. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2} = \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2}}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2}}\ \mathrm{d}x$.
18. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\sqrt{x + 1} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}\ \mathrm{d}x$.

Ejercicios 1.7.1 *TFC I. Preguntas, página 7*

Evalúe las integrales solicitadas utilizando la linealidad y la integral de funciones potencias:

1. 803.611 .
2. 28.7529 .
3. $\dfrac{9}{4}\left[(-3)^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right]$.
4. 56 .
5. $\dfrac{484}{3}$.
6. $\dfrac{51}{2}$.
7. 3.28345 .
8. -3.2026 .
9. -3.0388 .
10. -4.3713 .

Calcule el área comprendida entre el eje x y la gráfica de la función entre los límites indicados:

11. -18.6 .
12. 0 .
13. 3.4667 .
14. 0 .

Compruebe las fórmulas de derivación propuestas y complete la fórmula de integración, dando las condiciones necesarias sobre el intervalo $[a, b]$, para su validez.

15. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{x-1}$ donde $1 \notin [a, b]$.
16. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3 - x^2}{x^2+1}, \quad x \in [a, b]$.
17. $\displaystyle\int_a^b \frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x+2)^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt[3]{(x^2+3x+2)^2}$ donde $-2 \;\&\; -1 \notin [a, b]$.
18. $\displaystyle\int_a^b \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x+1}$ donde $[a, b] \subset (-1, \infty)$.

CAPÍTULO

1

La integral

1.8 La antiderivada y la integral indefinida

El teorema Fundamental del Cálculo constituye una herramienta muy poderosa para el cálculo de las integrales, pues nos permitirá considerar casos cada vez más complejos, que iremos abordando más adelante.

Recordemos el TFC I:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

siempre que $F'(x)$ sea continua en $[a, b]$.

De esta manera, cualquier fórmula de derivación se puede convertir en una fórmula de integración.
Por ejemplo, si $F(x) = \sqrt{x^2+1}$, entonces $F'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$ y así:

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1}\,\Big|_a^b = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1},$$

aclarando que la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Cuando $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)$, se menciona que es una antiderivada porque en realidad hay una infinidad de funciones que son antiderivadas de la función $f(x)$, por ejemplo:

$$G(x) = \sqrt{x^2+1} + 2 \;\&\; H(x) = \sqrt{x^2+1} - 5 \text{ son también antiderivadas de } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ya hemos visto que dos antiderivadas de una misma función difieren en una constante. Esta situación nos lleva a la siguiente definición:

canek.azc.uam.mx: 30/ 1/ 2017

Definición. El conjunto infinito de primitivas $\{ F(x) + C \}$ de la función $f(x)$, se denomina integral indefinida de $f(x)$ y se denota por:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Esta integral indefinida no es una función, sino una familia infinita de funciones, de modo que dos de ellas difieren entre sí solo por una constante. Dicho de otra forma, la notación introducida equivale a:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad F'(x) = f(x).$$

Con esta notación podemos transformar cualquier fórmula de derivación en una fórmula de integral indefinida. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.8.1 *Transformar las siguientes fórmulas de derivadas en fórmulas de integrales indefinidas:*

1. $\dfrac{d}{dx}x^r = r x^{r-1}\ (r \neq 0).$

2. $\dfrac{d}{dx}(x^2+1)^{-1} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}.$

3. $\dfrac{d}{dx}\left[(x+1)(x^2+2)\right] = (x^2+2) + 2x(x+1).$

▼

1. $\int r x^{r-1}\ \mathrm{d}x = x^r + C.$

2. $\int \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{x^2+1} + C.$

3. $\int [(x^2+2) + 2x(x+1)]\ \mathrm{d}x = (x+1)(x^2+2) + C.$

□

Ejemplo 1.8.2 *Convertir las siguientes integrales indefinidas en fórmulas de derivación:*

1. $\int (3x^2+2x-1)\ \mathrm{d}x = x^3 + x^2 - x + C.$

2. $\int \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{x^3+5} + C.$

3. $\int \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}} + C.$

▼

1. $\dfrac{d}{dx}\left(x^3+x^2-x+C\right) = 3x^2+2x-1.$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+5}+C\right) = \dfrac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}3x^2 = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}.$

3. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}} + C\right] = \dfrac{2}{3}\dfrac{3}{2}(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(2x-3) = \sqrt{x^2-3x+2}\,(2x-3).$

□

1.8.1 Relación entre la integral definida y la indefinida

Es preciso determinar la relación que hay entre la integral definida e indefinida, para evitar posibles confusiones.

Para empezar, recordamos al lector que una integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tiene límites o extremos de integración y da como resultado un número o una expresión que no contiene a la variable x de integración. Frecuentemente a esta variable se le llama variable muda ya que se puede sustituir con otra literal sin cambiar el resultado. Así por ejemplo:

$$\int_1^5 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^5 = 5^2 - 1^2 = 24 \quad \text{y también} \quad \int_1^5 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^5 2w\,\mathrm{d}w = 24.$$

Esto es, sea cual sea la literal utilizada en el integrando, el resultado es el mismo número real.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Como ya se mencionó, la integral indefinida $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ representa a la familia infinita de funciones que son antiderivadas de $f(x)$.

$$\text{Si } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Rightarrow \qquad \boxed{\text{Por el TFC I}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x) + C]\Big|_a^b =$$

$$= [F(b) + \not{C}] - [F(a) + \not{C}] = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

⋆ Resumiendo: para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, podemos primero calcular la integral indefinida $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ y luego considerar los extremos a, b para determinar $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Esto es:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b.$$

Por ejemplo:

$$\int_1^5 2x\,\mathrm{d}x = \left(\int 2x\,\mathrm{d}x\right)\Big|_1^5 = (x^2 + C)\Big|_1^5 = (5^2 + \not{C}) - (1^2 + \not{C}) = 24.$$

En la práctica no es necesario usar la constante C, llamada constante de integración, para calcular la integral definida.

Ejemplo 1.8.3 *Utilizar los ejemplos 1.8.1 y 1.8.2 para evaluar las siguientes integrales definidas:*

1. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_2^5 [(x^2+2) + 2x(x+1)]\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt[3]{4}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)\,\mathrm{d}x.$

▼

1. Por el ejemplo 1.8.1 (2.) tenemos:

$$\int_1^{10} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x^2+1}\Big|_1^{10} = \frac{1}{10^2+1} - \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{101} - \frac{1}{2} = \frac{2-101}{202} = -\frac{99}{202}.$$

2. Por el ejemplo 1.8.1 (3.) vemos:

$$\int_2^5 [(x^2+2)+2x(x+1)]\ \mathrm{d}x = (x+1)(x^2+2)\Big|_2^5 = (6)(27)-(3)(6) = 144.$$

3. Del ejemplo 1.8.2 (2.) obtenemos:

$$\int_{-1}^{\sqrt[3]{4}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{x^3+5}\,\Big|_{-1}^{\sqrt[3]{4}} = \sqrt{(\sqrt[3]{4})^3+5} - \sqrt{(-1)^3+5} = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 1.$$

Observe que el integrando $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$ es una función continua en $[-1, \sqrt[3]{4}]$.

4. Por último del ejemplo 1.8.2 (3.) concluimos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{3}(1^2-3\cdot 1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0^2-3\cdot 0+2)^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Observe que $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)$ es una función continua en $[0, 1]$.

□

1.8.2 Propiedades básicas de la integral indefinida

La integral indefinida $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ comparte con su derivada $f(x)$ algunas propiedades importantes, que enumeramos a continuación:

1. *Aditividad.* Si las integrales $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ & $\int g(x)\ \mathrm{d}x$ se conocen, entonces:

$$\int (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Esta propiedad desde luego se puede extender a cualquier suma finita de funciones.

2. *Homogeneidad.* Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

3. *Integral indefinida de funciones potencia.* Para cualquier exponente $r \neq -1$:

$$\int x^r\ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C. \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.8.4 *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

1. $\displaystyle\int \left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \frac{3x^5-7x^3}{x^2}\ \mathrm{d}x.$

3. $\int (2x + 3x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{3}}\ dx.$

▼ Las tres primeras integrales se calculan aplicando las propiedades 1., 2., 3. de la integral indefinida y algunas operaciones algebraicas. Es importante recalcar que, en la medida de lo posible, ante problemas como estos resulta conveniente simplificar (algebraicamente) las funciones antes de integrar.

1. $$\int \left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = 5\int x^4\ dx - 3\int x^2\ dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\ dx =$$
$$= \cancel{5}\frac{x^5}{\cancel{5}} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + C =$$
$$= x^5 - x^3 + \sqrt{x} + C.$$

2. $$\int \frac{3x^5 - 7x^3}{x^2}\ dx = 3\int \frac{x^5}{x^2}\ dx - 7\int \frac{x^3}{x^2}\ dx =$$
$$= 3\int x^3\ dx - 7\int x\ dx = 3\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^2}{2} + C.$$

3. $$\int (2x + 3x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{3}}\ dx = \int (2x \cdot x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}})\ dx =$$
$$= \int (2x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}})\ dx = 2\int x^{\frac{4}{3}}\ dx + 3\int x^{\frac{5}{6}}\ dx =$$
$$= 2\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{11}{6}} + 3\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{18}{11}x^{\frac{11}{6}} + C.$$

□

En síntesis, hemos visto en esta sección que la integral indefinida $\int f(x)\ dx$ es una notación adecuada para representar a la familia de todas las antiderivadas de $f(x)$, que difieren entre sí por una constante aditiva, y que toda fórmula de derivación se puede convertir en una fórmula de integral indefinida, junto con sus propiedades elementales.

Ejercicios 1.8.1 *La integral indefinida 1.* *Soluciones en la página 11*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (3x^2 - 4x + 5)\, dx$.
2. $\int (3x^{-2} - 4x^{-4} + 5)\ dx$.
3. $\int (3x^2 - 4x + 5)(2x^3)\, dx$.
4. $\int (3x^2 - 4x + 5)(6\sqrt{x})\, dx$.
5. $\int (3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + 5)(4\sqrt[3]{x^2})\, dx$.
6. $\int \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + 5}{4\sqrt[3]{x^2}}\ dx$.
7. $\int (2x^3 + 5)^2\, dx$.
8. $\int dx$.
9. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^3 dx$.
10. $\int (2x^3 + 5)^2(2x^2)\, dx$.
11. $\int (3x^2 - 2)6x\, dx$.
12. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 x^{-2}\, dx$.

Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 5)(2x^3)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} (3x^2 - 4x + 5)(6\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{3x^2 - 4x + 5}{6\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} (3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + 5)(4\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + 5}{4\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1.8.3 Integrales de funciones trascendentes

Las derivadas de funciones trascendentes nos permiten calcular otro tipo de integrales.

1. Logaritmo natural: sabemos que $\ln|\,x\,|$ es una función definida para $x \neq 0$, continua y con derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\,x\,| = \frac{1}{x},$$

por lo que

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|\,x\,| + C.$$

Ejemplo 1.8.5 *Calcule las siguientes integrales:*

a. $\displaystyle\int_{2}^{10} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

b. $\displaystyle\int_{1}^{T} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

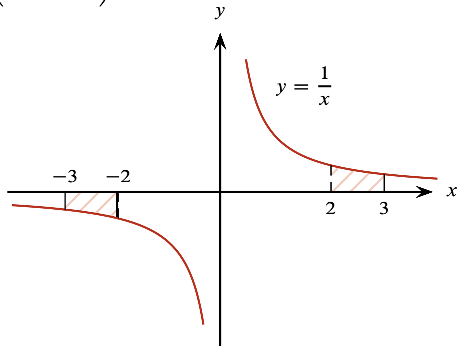
d. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

▼

a. $\displaystyle\int_{2}^{10} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\,\Big|_{2}^{10} = \ln 10 - \ln 2 = \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln 5.$

b. $\displaystyle\int_{1}^{T} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\,\Big|_{1}^{T} = \ln T - \cancel{\ln 1} = \ln T.$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{2}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(-\ln x\,\Big|_{2}^{3}\right) = -(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2 - \ln 3.$



Otra forma de calcular esta integral es

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|\,x\,|\,\Big|_{-3}^{-2} = \ln|-2| - \ln|-3| = \ln 2 - \ln 3.$$

d. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x =$ No existe, pues $\dfrac{1}{x}$ no es continua en $[-1, 1]$.

□

2. Exponencial natural: la función e^x es la única que goza de la propiedad de ser su propia derivada,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x.$$

Por consiguiente su integral indefinida es

$$\int e^x = e^x + C.$$

Además e^x es continua y diferenciable para todo x, por lo que esta fórmula de integración se aplica sin restricciones. Por la regla de la Cadena para cualquier constante a se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{ax} = a \cdot e^{ax}, \text{ o } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{e^{ax}}{a} = e^{ax};$$

por lo que

$$\int e^{ax}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Ejemplo 1.8.6 *Calcule las integrales*

a. $\displaystyle\int_{1}^{5} e^x\ \mathrm{d}x.$

b. $\displaystyle\int_{0}^{10} 3e^{2x}\ \mathrm{d}x.$

c. $\displaystyle\int_{-2}^{4} e^{-3x}\ \mathrm{d}x.$

▼

a. $\displaystyle\int_{1}^{5} e^x\ \mathrm{d}x = e^x \Big|_{1}^{5} = e^5 - e^1.$

b. $\displaystyle\int_{0}^{10} 3e^{2x}\ \mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{0}^{10} = 3\left(\frac{e^{20}}{2} - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{3}{2}(e^{20} - 1).$

c. $\displaystyle\int_{-2}^{4} e^{-3x}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{-3x}}{-3} \Big|_{-2}^{4} = \frac{e^{-12}}{-3} - \frac{e^{6}}{-3} = \frac{1}{3}(e^6 - e^{-12}).$

□

3. Logaritmos y exponenciales de otras bases: si $a > 0$ & $a \neq 1$, tenemos las fórmulas de derivación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (a^x) = a^x \ln a;$$

de las cuales resultan las integrales indefinidas:

$$\int \frac{1}{x \ln a}\ \mathrm{d}x = \log_a x + C; \qquad \int a^x \ln a\ \mathrm{d}x = a^x + C.$$

Ejemplo 1.8.7 *Calcule las integrales*

a. $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x\ln 3}\,\mathrm{d}x.$

b. $\displaystyle\int_{-1}^4 2^x \ln 2\,\mathrm{d}x.$

▼

a. $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x\ln 3}\,\mathrm{d}x = \log_3 x\,\Big|_2^7 = \log_3 7 - \log_3 2.$

b. $\displaystyle\int_{-1}^4 2^x \ln 2\,\mathrm{d}x = 2^x\,\Big|_{-1}^4 = 2^4 - 2^{-1} = 16 - \frac{1}{2} = \frac{31}{2}.$

□

4. Funciones trigonométricas: estas funciones son continuas y diferenciables en sus respectivos dominios, con derivadas:

$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\cos x = -\operatorname{sen} x$
$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x$	$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\cot x = -\csc^2 x$
$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x$	$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\csc x = -\csc x \cot x$

Convirtiendo esas derivadas en integrales indefinidas, obtenemos:

$\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$	$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\displaystyle\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\displaystyle\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
$\displaystyle\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$	$\displaystyle\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$

Al calcular integrales definidas de funciones trigonométricas se debe tener buen cuidado de hacerlo sobre intervalos en donde la función del integrando sea continua.

Ejemplo 1.8.8 *Evaluar las integrales*

a. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x.$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$

c. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x \cot x\,\mathrm{d}x.$ *en* $x = 0$.

▼

a. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - (-1) = 1.$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x \, \mathrm{d}x = 3\tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3\tan(0) = 3.$

c. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x \cot x \, \mathrm{d}x$ no existe, pues $\csc x \cot x$ tiene una discontinuidad de tipo ∞ en $x = 0$.

□

5. Funciones trigonométricas inversas: su dominio, rango (imagen) y derivada son

Función	Dominio	Rango	Derivada
$\operatorname{arcsen} x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$[-\infty, \infty]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$[-\infty, \infty]$	$[0, \pi]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Las funciones que más se emplean son las que tienen derivada positiva, por lo que solo incluimos las integrales indefinidas de ellas:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C.$$

Observación: la primera integral solo puede hacerse sobre intervalos contenidos en $(1, 1)$ y la última sobre intervalos dentro de $(-\infty, -1)$ o bien $(1, \infty)$.

Ejercicios 1.8.2 *La integral indefinida 2.* *Soluciones en la página 11*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+5}{2x^3}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int (3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta + 5\sec^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
3. $\displaystyle\int (3\tan\theta - 4\sec\theta + 5)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
4. $\displaystyle\int \frac{2\cot\theta - 5\csc\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
5. $\displaystyle\int \frac{5\tan\theta - 6\sec\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
6. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2}{u\sqrt{u^2-1}}\right)\mathrm{d}u$.
7. $\displaystyle\int \left(10e^u - \frac{4}{1+u^2} - \frac{8}{u}\right)\mathrm{d}u$.

Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta + 5\sec^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3\tan\theta - 4\sec\theta + 5)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cot\theta - 5\csc\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\tan\theta - 6\sec\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \left(2e^u - \frac{3}{1+u^2} - \frac{4}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u$.
6. $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2-2x+4}{x}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{3-2\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \left(2e^t - \frac{t^2+3}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$.

Ejercicios 1.8.1 *La integral indefinida 1.* *Preguntas, página 5*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.
2. $-3x^{-1} + \frac{4}{3}x^{-2} + 5x + C$.
3. $\frac{5}{2}x^4 - \frac{8}{5}x^5 + x^6 + C$.
4. $20x^{3/2} - \frac{48}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{36}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$.
5. $12x^{\frac{5}{3}} + \frac{72}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{96}{19}x^{\frac{19}{6}} + C$.
6. $\frac{15}{4}x^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{6}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C$.
7. $25x + 5x^4 + \frac{4}{7}x^7 + C$.
8. $-8x + 12x^3 - \frac{54}{5}x^5 + \frac{27}{7}x^7 + C$.
9. $\frac{1}{5x^5} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + x + C$.
10. $\frac{50}{3}x^3 + \frac{20}{3}x^6 + \frac{8}{9}x^9 + C$.
11. $-6x^2 + \frac{9}{2}x^4 + C$.
12. $\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$.

Evaluar las siguientes integrales definidas:

1. $-\frac{16}{5}$.
2. $\frac{544}{35}$.
3. $\frac{214}{45}$.
4. $\frac{3\,084}{247}$.
5. -16.1978.

Ejercicios 1.8.2 *La integral indefinida 2.* *Preguntas, página 9*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\frac{3}{2}\ln x + \frac{2}{x} - \frac{5}{4x^2} + C$.
2. $-3\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 5\tan\theta + C$.
3. $-4\theta - 3\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta + C$.
4. $-4\theta + 5\cot\theta - 2\csc\theta + C$.
5. $-3\theta + 5\sec\theta - 6\tan\theta + C$.
6. $3\operatorname{arcsen} u - 2\operatorname{arcsec} u + C$.
7. $-4\arctan u + 10e^u - 8\ln u + C$.

Calcular las siguientes integrales definidas:

1. 3.0503.
2. 0.8338.
3. -6.1773.
4. -6.2851.
5. -5.2028.
6. 10.147.
7. 1.6631.
8. 0.86577.

CAPÍTULO

1

La integral

1.9 Teorema Fundamental del Cálculo II

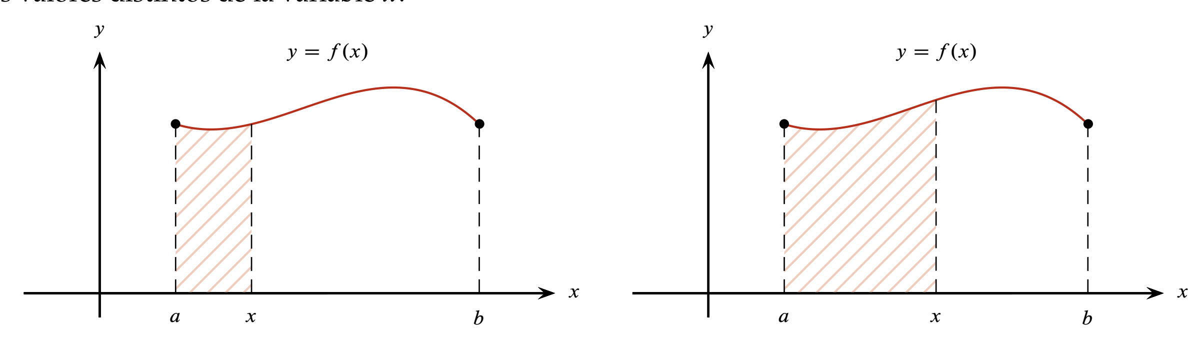
En esta sección presentamos la segunda parte del teorema Fundamental del Cálculo (TFC II), que complementa la sección 1.7 y termina de describir la estrecha relación que hay entre la derivada y la integral.

1.9.1 Funciones definidas mediante integrales

Consideremos una función continua $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$, y para cualquier $x \in [a, b]$ definamos una nueva función $\phi(x)$ mediante

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Las siguientes figuras representan dos valores de la función $\phi(x)$ (las áreas de la regiones marcadas) para dos valores distintos de la variable x:



Observe que en el integrando usamos la variable muda t de integración, para que no se confunda con la variable x en el extremo superior de integración.

Esta función $\phi(x)$ representa el área bajo la curva $f(x)$ desde a hasta el punto x. Se puede ver claramente que:

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

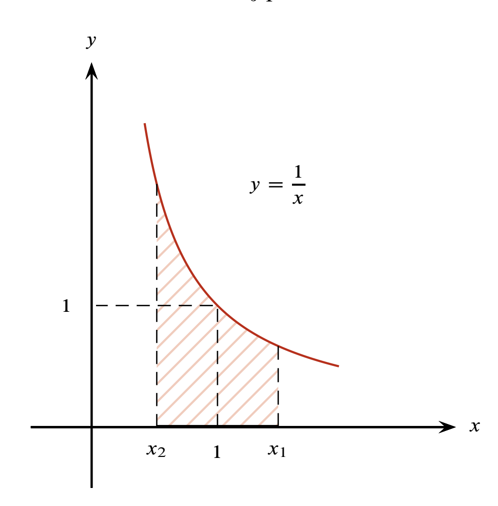
1. $\phi(a) = \int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$

2. $\phi(b) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ es el área de la región R, comprendida desde a hasta b.

Se deduce que en todo el intervalo $[a, b]$ esta función $\phi(x)$ es creciente y, como $f(x)$ es continua, es de esperarse que $\phi(x)$ también lo sea, pues un pequeño cambio en la variable x producirá un cambio también pequeño en el área debajo de $y = f(x)$.

Ejemplo 1.9.1 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua para $x > 0$; utilizando $a = 1$, obtenemos:*

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$



▼ Observe que:

1. Para valores de $x > 1$, como x_1 en la figura, $\phi(x) > 0$.

2. Para valores de x entre 0 y 1, como x_2, $\phi(x) < 0$, por el sentido de la integración.

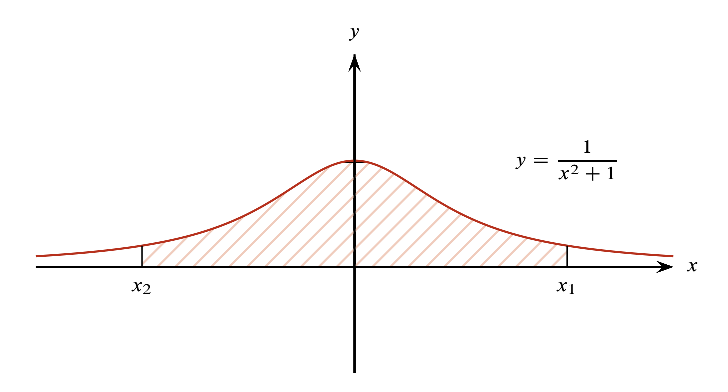
3. Hay un caso particular $\phi(1) = 0$.

4. ϕ es una función creciente de x.

□

Ejemplo 1.9.2 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ está definida y es continua para todo $x \epsilon \mathbb{R}$. Tomando $a = 0$, podemos definir*

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$



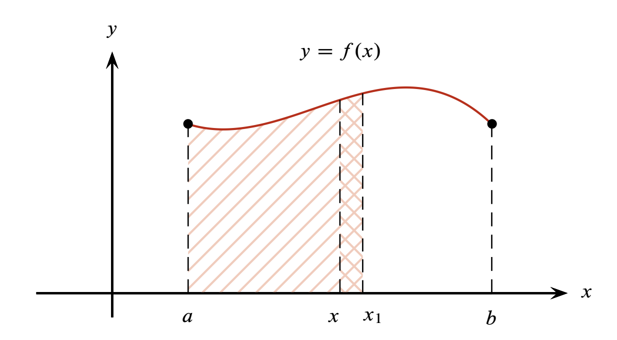
▼ Observe que:

1. Para $x > 0$, como x_1 de la figura, $\phi(x) > 0$.
2. Para $x < 0$, como x_2, $\phi(x) < 0$.
3. Se cumple $\phi(0) = 0$.
4. La función ϕ es creciente.

□

Por el momento nos interesa estudiar cómo es la razón de cambio, es decir, la derivada de la función

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Para esto consideramos x, x_1 arbitrarios en el intervalo $[a, b]$ con $x < x_1$.
La diferencia entre $\phi(x)$ y $\phi(x_1)$ es, de acuerdo con lo que hemos visto antes:

$$\int_x^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Por el teorema del Valor Medio para integrales, para algún ξ entre x & x_1:

$$\phi(x_1) - \phi(x) = \int_x^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t = f(\xi)(x_1 - x).$$

Si suponemos $x_1 = x + h$, donde h es la diferencia entre x & x_1, entonces la anterior igualdad se puede escribir como

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t = f(\xi)(x + h - x) = f(\xi)h,$$

de donde:

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = f(\xi). \tag{1.1}$$

En (1.1) ξ es algún número entre x & $x + h$. Si la función f es continua en x, entonces $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, así como $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$, ya que $\xi \to x$, cuando $h \to 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x). \tag{1.2}$$

Recordando la definición de derivada, la igualdad anterior queda:

$$\phi'(x) = f(x). \tag{1.3}$$

El resultado obtenido en (1.3) se puede enunciar como sigue:

- Teorema Fundamental del Cálculo, segunda parte (TFC II)

  Si definimos la función $\phi(x)$ mediante

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\ dt,$$

entonces, en los puntos x donde f es continua, $\phi(x)$ es diferenciable y

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ dt = f(x).$$

Ejemplo 1.9.3 *Sea la función $f(x) = x^k$, para $k = 1, 2, 3\ldots$; calcular la derivada de $\phi(x) = \int_0^x f(t)\ dt$.*

▼ En este caso podemos calcular la integral, usando (**??**) de la página **??** y la notación (**??**) de la página **??**:

$$\phi(x) = \int_0^x t^k\ dt = \left.\frac{t^{k+1}}{k+1}\right|_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

se ve entonces que

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x t^k\ dt = x^k = f(x) \qquad \boxed{\text{Usando el TFC II directamente;}}$$

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{(k+1)x^k}{k+1} = x^k = f(x) \qquad \boxed{\text{Derivando la integral conocida.}}$$

□

Ejemplo 1.9.4 *Calcular la derivada de la función*

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt,\ \textit{para } x > 0.$$

▼ Aplicando el TFC II:

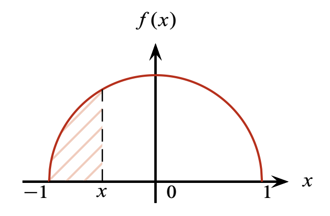
$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\ dt = \frac{1}{x},$$

para todo $x > 0$, pues el integrando es una función continua en $(0, \infty)$.

□

Ejemplo 1.9.5 *Calcular la derivada de $\phi(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2}\ dt$.*

▼ La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que se encuentra por encima del eje x para $-1 \le x \le 1$.



Entonces la función definida como

$$\phi(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$$

describe (para $-1 \le x \le 1$) el área bajo la circunferencia y sobre el eje x desde -1 hasta x. La razón de cambio de dicha área con respecto a x está dada entonces por la derivada

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-1}^{x} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{1-x^2}.$$

□

Una manera de parafrasear el TFC II para $f(x) \ge 0$ es la siguiente: la razón de cambio del área bajo la gráfica de una función f sobre el eje x desde un punto a hasta un punto x_0 es, precisamente, el valor de la función en x_0, a condición de que f sea continua en dicho punto.

- Cuando una función se define mediante una integral con la variable en el extremo inferior, se puede recurrir a la convención del signo de la integral cuando se desea calcular su derivada. Si tenemos definida

  $$\psi(x) = \int_{x}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t,$$

  entonces:

  $$\psi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_{b}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{b}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = -f(x),$$

  siempre que exista $\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ y siempre que f sea continua en x.

Ejemplo 1.9.6 *Calcule la derivada de la siguiente función:*

$$\phi(x) = \int_{2}^{x} \frac{t^3 - 2t^2 + 1}{t^2 - 1}\ \mathrm{d}t.$$

▼ Aplicando el TFC II se obtiene:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_{2}^{x} \frac{t^3 - 2t^2 + 1}{t^2 - 1}\ \mathrm{d}t = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

lo anterior se cumple en los puntos x de modo que la integral $\int_{2}^{x}$ esté definida y que $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$ sea continua. Un intervalo donde esto es válido es el abierto $(1, \infty)$ (puede ser $x < 2$ por la convención del signo de la integral).

□

- Al combinar el TFC II con la regla de la Cadena, se puede calcular la derivada de funciones del tipo:

  $$g(x) = \int_{a}^{\phi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t,$$

  donde $\phi(x)$ es una función derivable.

El cálculo de $g'(x)$ se logra a partir de la composición de funciones:

$$x \xrightarrow{\ \phi\ } y = \phi(x) \xrightarrow{\ \sigma\ } u = \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\sigma \circ \phi$$

de donde se infiere que

$$g(x) = (\sigma \circ \phi)(x) = \sigma[\phi(x)] = \int_a^{\phi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces, por la regla de la Cadena:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}u = \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dy}\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right) =$$
$$= f(y)\cdot\phi'(x) = f[\phi(x)]\cdot\phi'(x).$$

Esto es:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\phi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\phi(x)])\cdot\phi'(x).$$

Ejemplo 1.9.7 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

▼ Usando el resultado anterior:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x^2)\cdot 2x.$$

□

Ejemplo 1.9.8 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} 3t\sqrt{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} 3t\sqrt{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \left[3(x^2)\sqrt{(x^2)^4+1}\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\right) = \left[3(x^2)\sqrt{(x^2)^4+1}\right]2x = 6x^3\sqrt{x^8+1}.$$

□

Ejemplo 1.9.9 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_3^{\sqrt{x}} (2t - t^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_3^{\sqrt{x}} (2t - t^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{x} - (\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\right) = \left(2\sqrt{x} - x^{\frac{1}{4}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}.$$

□

Ejemplo 1.9.10 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_2^{\cos x^2} \tan(\sqrt{t}\,)\,\mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{d}{dx}\int_{2}^{\cos x^2}\tan(\sqrt{t}\,)\,dt = \tan(\sqrt{\cos x^2})\left(\frac{d}{dx}\cos x^2\right) = \tan(\sqrt{\cos x^2})\cdot(-\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x.$$

□

Ejemplo 1.9.11 *Calcular la derivada:*

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{5}(4t+2)\,dt.$$

▼

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{5}(4t+2)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{5}^{x^3}(4t+2)\,dt = -\left[4(x^3)+2\right]\left(\frac{d}{dx}x^3\right) = -(4x^3+2)3x^2 = -12x^5-6x^2.$$

□

- Los resultados anteriores se aplican para derivar una integral cuyos extremos son dos funciones $g(x)$ & $h(x)$ derivables. Considerando un punto fijo a entre $g(x)$ & $h(x)$, así como la propiedad de aditividad respecto del intervalo:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{h(x)} f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{a}^{h(x)} f(t)\,dt - \int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt\right] =$$
$$= f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x).$$

Esto es:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x).$$

Ejemplo 1.9.12 *Calcular la derivada:*

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,dt.$$

▼

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{x^3} f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_{a}^{x^2} f(t)\,dt + \int_{a}^{x^3} f(t)\,dt\right] =$$
$$= \frac{d}{dx}\int_{a}^{x^3} f(t)\,dt - \frac{d}{dx}\int_{a}^{x^2} f(t)\,dt = f(x^3)\left(\frac{d}{dx}x^3\right) - f(x^2)\left(\frac{d}{dx}x^2\right) =$$
$$= f(x^3)3x^2 - f(x^2)2x.$$

□

Ejemplo 1.9.13 *Calcular la derivada de la función:*

$$\phi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)dt.$$

▼

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^{1}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)dt + \int_{1}^{x^3}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{x^3}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)dt - \int_{1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)dt\right] =$$
$$= \left[\frac{(x^3)^2-1}{(x^3)+4}\right]\frac{d}{dx}(x^3) - \left[\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}+4}\right]\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{x^6-1}{x^3+4}\cdot 3x^2 - \frac{x-1}{\sqrt{x}+4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{3x^8-3x^2}{x^3+4} - \frac{x-1}{2x+8\sqrt{x}}.$$

□

Ejemplo 1.9.14 *Calcular la derivada de la función:*

$$f(x) = \int_{e^{5x}}^{\ln x^7} \tan(\sqrt{t^2})\, \mathrm{d}t.$$

▼

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan\left(\sqrt{\ln^2 x^7}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^7) - \tan\sqrt{e^{10x}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{5x}) = \\ &= \tan\left(\sqrt{\ln^2 x^7}\right)\left(\frac{1}{x^7}\right) \cdot 7x^6 - \tan\sqrt{e^{10x}} \cdot e^{5x} \cdot 5 = \\ &= 7\tan\left(\sqrt{\ln^2 x^7}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - 5\tan\sqrt{e^{10x}} \cdot e^{5x}. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 1.9.1 *TFC II. Soluciones en la página 9*

1. Calcular las derivadas de las funciones siguientes (especificando para qué valores de x es válida la expresión obtenida):

   a. $\phi(x) = \int_0^x \left[\sqrt{1+\sqrt{t}}\right]^5 \mathrm{d}t.$

   b. $\psi(x) = \int_{-3}^x \sqrt{t^2+4t+2}\, \mathrm{d}t.$

   c. $\rho(x) = \int_x^2 [t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + 1]\, \mathrm{d}t.$

   d. $\phi(x) = \int_1^{x^3} \sqrt{t^2+2}\, \mathrm{d}t.$

   e. $f(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$

   f. $g(x) = \int_{\cos x^3}^1 e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$

   g. $h(x) = \int_2^{e^{2x}} \operatorname{sen} t^3\, \mathrm{d}t.$

   h. $i(x) = \int_{\cos x^2}^3 \operatorname{sen} t^3\, \mathrm{d}t.$

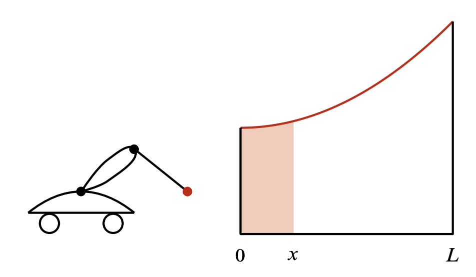
   i. $\psi(x) = \int_x^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+2}.$

   j. $\rho(x) = \int_{x^3}^{x+5} \frac{t+3}{t-2}\, \mathrm{d}t.$

   k. $j(x) = \int_{\operatorname{sen} x^3}^{\cos x^5} e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$

   l. $k(x) = \int_{\ln x^5}^{e^{7x}} \operatorname{sen} t^3\, \mathrm{d}t.$

2. Un brazo robótico está programado para pintar una pieza metálica plana cuya forma es como las regiones cuya área hemos estado considerando, para un intervalo de 0 a L, debajo de una curva $f(x)$ y sobre el eje x.



   El brazo pinta de arriba hacia abajo en franjas muy delgadas (que podríamos pensar infinitamente pequeñas) y se traslada horizontalmente de 0 a L mediante un mecanismo de locomoción. Al llegar al punto x del intervalo $[0, L]$, ¿cómo está cambiando la cantidad de pintura que utiliza el robot?

Ejercicios 1.9.1 *TFC II. Preguntas, página 8*

1. Calcular las derivadas de las funciones siguientes; específicamente para qué valores de x es válida la expresión obtenida.
   a. $\phi'(x) = \left[\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^5$.
   b. $\psi'(x) = \sqrt{x^2+4x+2}$.
   c. $\rho'(x) = -[x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 1]$.
   d. $\phi'(x) = (\sqrt{x^6+2})(3x^2)$.
   e. $f'(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x$.
   f. $g'(x) = e^{\cos^2 x^3} \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2$.
   g. $h'(x) = \operatorname{sen} e^{6x} \cdot e^{2x} \cdot 2$.
   h. $i'(x) = \operatorname{sen}(\cos^3 x^2) \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot 2x$.
   i. $\psi'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)(2x) - \dfrac{1}{x+2}$.
   j. $\rho'(x) = \dfrac{x+8}{x+3} - \left(\dfrac{x^3+3}{x^3-2}\right)(3x^2)$.
   k. $j'(x) = e^{\cos^2 x^5} \cdot (-\operatorname{sen} x^5) \cdot 5x^4 - e^{\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2$.
   l. $k'(x) = \operatorname{sen}(e^{21x}) \cdot e^{7x} \cdot 7 - \operatorname{sen}(\ln^3 x^5) \cdot \dfrac{1}{x^5} \cdot 5x^4$.
2. Si la función que define la gráfica de la región es $f(x)$, el cambio de la pintura que utiliza el robot es $f(x)$.

CAPÍTULO

1

La integral

[1]

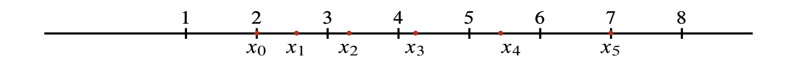
1.10 Apéndice

Ejemplo 1.10.1 *Consideremos la función* $f(x) = x^5$. *Encontrar la suma de Riemann que aproxima el área* $A(R)$ *bajo la gráfica, sobre el eje* x, *entre* $x = a$ & $x = b$, *con* $0 < a < b$.

▼ Para aproximar el área $A(R)$, la partición en subintervalos de igual longitud no es siempre la mejor opción. En este caso lo haremos de manera diferente, escogiendo como puntos de una partición en n subintervalos los siguientes:

$$x_0 = a, \quad x_1 = aq, \quad x_2 = aq^2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = aq^{n-1}, \quad x_n = aq^n = b,$$

hemos abreviado $q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$. Como $0 < a < b$, tenemos $1 < \dfrac{b}{a}$ y también $1 < q < q^2 < \ldots < q^n$. Esta es una partición del intervalo $[a, b]$ y las distancias entre puntos consecutivos de la partición no son iguales, como se muestra en la figura siguiente $\left(a = 2,\ b = 7\,,\ q = \sqrt[5]{\dfrac{7}{2}}\right)$:



Los valores son

$$x_0 = a = 2,\ \ x_1 = aq = 2.57,\ \ x_2 = aq^2 = 3.3,\ \ x_3 = aq^3 = 4.24,\ \ x_4 = aq^4 = 5.47\ \ \&\ \ x_5 = aq^5 = 7.$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Formamos la suma de Riemann para $f(x) = x^5$ correspondiente a esta partición, tomando $x_i^* = x_{i-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_{i-1})^5(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(aq^{i-1})^5(aq^i - aq^{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^5 q^{5(i-1)} \cdot a(q^i - q^{i-1}) = a^6 \sum_{i=1}^{n} q^{5(i-1)}[q^{i-1}(q-1)] = \\
&= a^6 \sum_{i=1}^{n} q^{6(i-1)}(q-1) = a^6(q-1)\sum_{j=0}^{n-1}(q^6)^j = \boxed{\begin{array}{l} q-1 \text{ no depende del índice;} \\ j = i-1, \text{ cambio del índice} \end{array}} \\
&= a^6(q-1)\frac{(q^6)^n - 1}{q^6 - 1} = a^6(q^{6n} - 1)\frac{q-1}{q^6-1} = \\
&= a^6[(q^n)^6 - 1]\frac{q-1}{q^6-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $q^n = \dfrac{b}{a} \Rightarrow (q^n)^6 = \dfrac{b^6}{a^6}$, entonces:

$$a^6[(q^n)^6 - 1]\frac{q-1}{q^6-1} = a^6\left(\frac{b^6}{a^6} - 1\right)\frac{q-1}{q^6-1} = (b^6 - a^6)\frac{q-1}{q^6-1}.$$

Por último, una fórmula de suma es

$$\sum_{i=0}^{5} q^i = \frac{q^6 - 1}{q - 1} \Rightarrow 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = \frac{q^6-1}{q-1}.$$

Por lo que

$$\frac{q-1}{q^6-1} = \frac{1}{1 + q + \ldots + q^5}.$$

El resultado final de la suma de Riemann es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{b^6 - a^6}{1 + q + q^2 + \ldots + q^5}.$$

Para terminar, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ de la expresión anterior, solo hay que notar que para cualquier n se tiene $q = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} q = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. De esta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^6 - a^6}{1 + q + q^2 + \ldots + q^5} = \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Es decir:

$$\int_a^b x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

□

En el ejemplo anterior con modificaciones menores podemos tratar de manera análoga el caso de cualquier función potencia $f(x) = x^p$ con exponente entero positivo. El camino seguido nos daría un resultado similar y, de esa forma, tomando la partición con intervalos desiguales

$$\left\{ x_i = aq^i \;\middle|\; i = 0, 1, 2, \ldots, n \right\}, \text{ donde } q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

se evita el tener que obtener fórmulas para las sumas del tipo $\sum_{i=1}^{n} i^k$. Aunque tales fórmulas existen para todas las sumas de potencias de enteros positivos, son bastante complicadas en general.

El razonamiento para la suma de Riemann de $f(x) = x^p$ entre $x = a$ & $x = b$ $\left(\text{con } 0 < a < b \;\&\; q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\right)$ se desarrolla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10.2 *Consideremos la función $f(x) = x^p$. Encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo la gráfica, sobre el eje x, entre $x = a$ & $x = b$, con $0 < a < b$.*

▼

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(aq^{i-1})^p(aq^i - aq^{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a^p q^{(i-1)p} aq^{i-1}(q-1) = a^{p+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^{(i-1)p+(i-1)} =$$

$$= a^{p+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^{(i-1)(p+1)} = a^{p+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{p+1})^{i-1} =$$

$$= a^{p+1}(q-1)\sum_{j=0}^{n-1}(q^{p+1})^j = a^{p+1}(q-1)\frac{(q^{p+1})^n - 1}{q^{p+1} - 1} =$$

$$= a^{p+1}[(q^n)^{p+1} - 1]\frac{q-1}{q^{p+1}-1} = a^{p+1}\left(\frac{b^{p+1}}{a^{p+1}} - 1\right)\frac{q-1}{q^{p+1}-1},$$

puesto que $q^n = \dfrac{b}{a} \Rightarrow (q^n)^{p+1} = \dfrac{b^{p+1}}{a^{p+1}}$.

Como además $\sum_{j=0}^{p} q^j = \dfrac{q^{p+1}-1}{q-1}$:

$$\frac{q-1}{q^{p+1}-1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{p} q^j} = \frac{1}{1 + q + q^2 + \ldots + q^p},$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = (b^{p+1} - a^{p+1})\frac{q-1}{q^{p+1}-1} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{1 + q + q^2 + \ldots + q^p}.$$

Por último, observando que $\lim\limits_{n\to\infty} q = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{1 + q + q^2 + \ldots + q^p} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^p} =$$

$$= \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b x^p \, \mathrm{d}x = \frac{b^{p+1} - a^{p-1}}{p+1}.$$

□

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.1 Introducción

En este capítulo veremos las técnicas más comunes para calcular integrales indefinidas y definidas de una amplia variedad de funciones.
Para esto comenzaremos presentando brevemente el concepto de diferencial de una función.

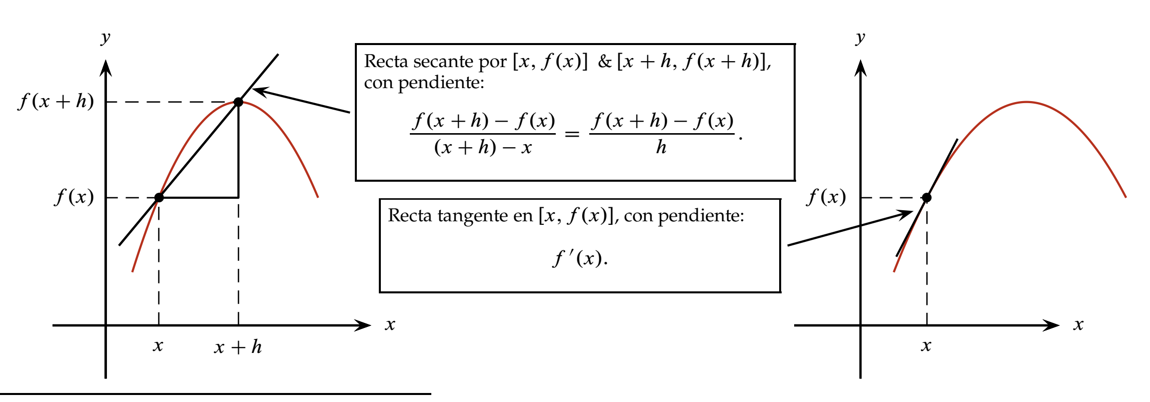
La diferencial de una función

En el libro *Cálculo diferencial* [?] se introdujo el concepto de la derivada de una función $y = f(x)$, definida como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.1}$$

En la notación de Leibniz para derivadas se escribe, para una función $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{2.2}$$



1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Por ser el límite del cociente (2.1), decimos que $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de la función $f(x)$ en el punto x, lo cual significa que un pequeño cambio h en ese punto puede causar un pequeño cambio en $f(x)$ aproximadamente igual a $f'(x)\cdot h$.
Una notación comúnmente utilizada para referirse a estos cambios es la siguiente: Δx denota el cambio o incremento en x al moverse a un punto cercano; Δy denota el correspondiente cambio en y, es decir:

$$\Delta x = (x+h) - x = h \quad \& \quad \Delta y = f(x+h) - f(x). \tag{2.3}$$

Con esta notación podemos escribir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.4}$$

y esta última fórmula se puede interpretar, para valores muy pequeños de Δx pero distintos de 0, como una aproximación.

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.5}$$

o, equivalentemente,

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x. \tag{2.6}$$

Observe el parecido entre las fórmulas (2.2) y (2.5), aunque en la primera tenemos una igualdad y el cociente $\dfrac{dy}{dx}$ denota el límite cuando $\Delta x \to 0$ de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, mientras que en la fórmula (2.5) tenemos solo una aproximación.
La aproximación (2.6) se utiliza para hacer la estimación del cambio Δy en la variable y producido por un pequeño incremento Δx de la variable x. De momento solo usaremos la fórmula (2.6) para motivar la siguiente definición.

- Definición. Si $y = f(x)$ es una función con derivada $f'(x)$, se define la diferencial de $f(x)$, denotada por dy o bien $d f(x)$ mediante

$$dy = d f(x) = f'(x)\ dx. \tag{2.7}$$

  donde denominamos a dx como la diferencial de la variable independiente x.

El cálculo de la diferencial de una función no presenta dificultad y se puede interpretar formalmente como la simple multiplicación de la derivada $f'(x)$ por la diferencial dx.

Ejemplo 2.1.1 *Calcular la diferencial de las siguientes funciones:*

1. $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$.
2. $z = g(t) = \dfrac{t^2 + 2t}{t - 3}$.

▼ Formalmente sólo tenemos que calcular las derivadas y multiplicar por la correspondiente diferencial de la variable independiente:

1. $f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow dy = f'(x)\ dx = (2x - 3)\ dx$.
2.
$$g'(t) = \frac{(t-3)(2t+2) - (t^2+2t)1}{(t-3)^2} = \frac{2t^2 + 2t - 6t - 6 - t^2 - 2t}{(t-3)^2} = \frac{t^2 - 6t - 6}{(t-3)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dz = g'(t)\ dt = \left[\frac{t^2 - 6t - 6}{(t-3)^2}\right] dt.$$

□

- Por su definición $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$, todas las fórmulas para el cálculo de derivadas tienen sus fórmulas correspondientes en diferenciales, como las que enlistamos a continuación, donde f, g, u, v denotan funciones:

  1. $\mathrm{d}C = 0$ para C constante.
  2. $\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$.
  3. $\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}f(x)$.
  4. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$.
  5. $\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$.
  6. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$.
  7. $\mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u$.
  8. $\mathrm{d}(f[g(x)]) = f'[g(x)]\,\mathrm{d}g(x) = f'[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 2.1.2 *Si* $f(y) = \sqrt{y}$ & $g(x) = x^2 + 1$, *calcular* $\mathrm{d}(f[g(x)])$ & $\mathrm{d}(g[f(y)])$, *suponiendo que las composiciones de estas funciones están definidas y son diferenciables.*

▼ Observamos que

$$f'(y) = \frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \& \quad g'(x) = 2x,$$

así que

$$\mathrm{d}(f[g(x)]) = f'[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{g(x)}}\cancel{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Análogamente,

$$\mathrm{d}(g[f(y)]) = g'[f(y)]f'(y)\,\mathrm{d}y = [\cancel{2}f(y)]\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y.$$

Observe que se obtienen los mismos resultados si hacemos primero la composición y después derivamos para calcular la diferencial:

$$f[g(x)] = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{d}{dx}f[g(x)] = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}(f[g(x)]) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x;$$
$$g[f(y)] = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 + 1 = y + 1 \Rightarrow \mathrm{d}(g[f(y)]) = \mathrm{d}(y+1) = \mathrm{d}y.$$

□

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.2 Integración por cambio de variable

Una vez presentado el concepto de diferencial de una función, podemos introducir el método de integración llamado cambio de variable. Lo haremos primeramente para integrales indefinidas y posteriormente para integrales definidas.

2.2.1 Cambio de variable en integrales indefinidas

La regla de la Cadena para derivar funciones compuestas establece que si $u = f(x)$ & $y = g(u) = g[f(x)]$, entonces:

$$\frac{d}{dx}(g[f(x)]) = g'[f(x)]f'(x). \tag{2.1}$$

La diferencial correspondiente es

$$\mathrm{d}(g[f(x)]) = g'[f(x)]f'(x)\ \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Tomando en cuenta que $u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\ \mathrm{d}x$, entonces:

$$\mathrm{d}[g(u)] = g'(u)\ \mathrm{d}u. \tag{2.3}$$

Como ya hemos señalado, toda fórmula de derivación se convierte en una fórmula de integración, y la que corresponde a (2.1) o su equivalente (2.2) es

$$\int g'[f(x)]f'(x)\ \mathrm{d}x = g[f(x)] + C. \tag{2.4}$$

También podemos decir de manera más simple que

$$\int g'(u)\ \mathrm{d}u = g(u) + C. \tag{2.5}$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Podríamos combinar (2.4) y (2.5) de manera que se pueda apreciar lo que se hace en este método:

$$\underbrace{\int g'[f(x)]f'(x)\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = f(x); \\ \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int g'(u)\,\mathrm{d}u = g(u) + C = g[f(x)] + C. \tag{2.6}$$

Las igualdades (2.6) describen esquemáticamente este método de sustitución o cambio de variable; en la integral original se debe encontrar una función $u = f(x)$ y su diferencial $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$, de manera que, al sustituir $f(x)$ por u, $f'(x)\,\mathrm{d}x$ por $\mathrm{d}u$, el integrando se abrevia y simplifica; cuando se calcula la integral indefinida, obtenemos como resultado una función de u, se termina escribiendo $f(x)$ en lugar de u para regresar a las variables originales. Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.1 *Calcular la integral* $\int (x^2+1)^{10} 2x\,\mathrm{d}x$.

▼ Observando el integrando, se puede ver que si escribimos $u = x^2+1$, entonces $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, que es el factor que multiplica a $(x^2+1)^{10}$, así que la integral con este cambio de variable queda:

$$\underbrace{\int (x^2+1)^{10} 2x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1; \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int u^{10}\,\mathrm{d}u.$$

Esta nueva integral en la variable u es muy fácil de calcular:

$$\int u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{11}}{11} + C.$$

Ahora, para terminar el proceso escribimos x^2+1 en lugar de u en el último resultado para concluir que

$$\int (x^2+1)^{10} 2x\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.2 *Calcular la integral* $\int \frac{3x^2+5}{(x^3+5x-7)^4}\,\mathrm{d}x$.

▼ En este caso, la derivada de la expresión entre paréntesis es el numerador del integrando, por lo que podemos hacer el siguiente cambio de variable: $u = x^3+5x-7$ & $\mathrm{d}u = (3x^2+5)\,\mathrm{d}x$. Así la integral se simplifica:

$$\underbrace{\int \frac{3x^2+5}{(x^3+5x-7)^4}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^3+5x-7; \\ \mathrm{d}u = (3x^2+5)\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^4} = \int u^{-4}\,\mathrm{d}u;$$

Esta última integral se calcula fácilmente y una vez hecho esto regresamos a la variable original poniendo x^3+5x-7 en lugar de u:

$$\int u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{(x^3+5x-7)^{-3}}{-3} + C = \frac{-1}{3(x^3+5x-7)^3} + C,$$

de modo que

$$\int \frac{3x^2+5}{(x^3+5x-7)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{3(x^3+5x-7)^3} + C.$$

□

Para utilizar con éxito el método que estamos viendo, se debe identificar una parte del integrando como la función que llamaremos u, y además un factor del integrando deberá ser su diferencial, $\mathrm{d}u$. En algunos casos a esta diferencial puede faltarle un factor constante, el cual podemos operar gracias a la linealidad de la integral.

Ejemplo 2.2.3 *Calcular la integral* $\int \frac{2x^3+3x}{\sqrt{x^4+3x^2-2}}\,\mathrm{d}x$.

▼ En vista de los ejemplos anteriores, parece buena idea tomar como u a la expresión dentro del radical: $u = x^4+3x^2-2$. Pero entonces su diferencial es $\mathrm{d}u = (4x^3+6x)\,\mathrm{d}x$ y no lo que tenemos en el numerador del integrando; sin embargo podemos notar que si factorizamos resulta $\mathrm{d}u = 2(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x$, de donde $(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$, así que podemos sustituir y obtener:

$$\underbrace{\int \frac{(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+3x^2-2}}}_{\boxed{u = x^4+3x^2-2;\quad \frac{\mathrm{d}u}{2} = (2x^3+3x)\,\mathrm{d}x.}} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = \sqrt{u} + C.$$

Ahora, al retomar la variable original, resulta:

$$\int \frac{(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+3x^2-2}} = \sqrt{x^4+3x^2-2} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.4 *Calcular la integral* $\int [x^3+3x^2-6x]^4(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$.

▼ Con el cambio de variable $u = x^3+3x^2-6x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = (3x^2+6x-6)\,\mathrm{d}x = 3(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$.
En el integrando no aparece $3(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$ sino $(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$; pero si escribimos $\frac{\mathrm{d}u}{3} = (x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$ se resuelve la integral como sigue:

$$\underbrace{\int (x^3+3x^2-6x)^4(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x}_{\boxed{u = x^3+3x^2-6x;\quad \frac{\mathrm{d}u}{3} = (x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x.}} = \int u^4\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\frac{u^5}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{15}(x^3+3x^2-6x)^5 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.5 *Calcular la integral* $\int [3(x+2)^2 - 7(x+2) + 5]\,\mathrm{d}x$.

▼ Aunque sería fácil evaluar la integral, después de realizar unas cuantas operaciones algebraicas, es aún más fácil hacer la sustitución $u = x + 2$ & $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, con lo cual obtenemos:

$$\underbrace{\int [3(x+2)^2 - 7(x+2) + 5]\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x+2; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x. \end{array}}} = \int (3u^2 - 7u + 5)\,\mathrm{d}u = u^3 - \frac{7}{2}u^2 + 5u + C =$$

$$= (x+2)^3 - \frac{7}{2}(x+2)^2 + 5(x+2) + C.$$

□

Ejemplo 2.2.6 *Calcular la integral* $\int \sqrt{t^2 - 3t + 2}\,(6t - 9)\,\mathrm{d}t$.

▼ Con el cambio de variable $u = t^2 - 3t + 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = (2t - 3)\,\mathrm{d}t$ no se coincide con el factor del integrando $(6t - 9)\,\mathrm{d}t$; sin embargo podemos factorizar este último y obtener $(6t - 9)\,\mathrm{d}t = 3(2t - 3)\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}u$, con lo que la integral se resuelve como sigue:

$$\underbrace{\int \sqrt{t^2 - 3t + 2}\,(6t - 9)\,\mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{l} u = t^2 - 3t + 2; \\ \mathrm{d}u = (2t - 3)\,\mathrm{d}t. \end{array}}} = \int \sqrt{t^2 - 3t + 2}\,(3)(2t - 3)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{u} \cdot 3\,\mathrm{d}u =$$

$$= 3\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = 3\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 3\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} + C = 2(t^2 - 3t + 2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

□

En los ejemplos anteriores cabe mencionar que se factoriza la diferencial $\mathrm{d}u$ para después, por linealidad de la integral, poner el factor constante que la multiplica fuera de la integral. De ninguna manera se puede poner fuera de la integral un factor que involucre la variable de integración. Por ejemplo sería completamente equivocado hacer lo siguiente:

$$\underbrace{\int (x^2 + 2x)^3 (2x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 + 2x; \\ \mathrm{d}u = (2x + 2)\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int u^3 x\,\mathrm{d}u \overset{?}{=} x\int u^3\,\mathrm{d}u.$$

La primera igualdad es correcta (aunque no muy útil), pero la segunda es un error.

Ejemplo 2.2.7 *Calcular la integral* $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Tomando en cuenta que la derivada de una función exponencial resulta en términos de ella misma, inferimos que un cambio de variable adecuado podría ser $u = e^{2x} + 1$.

Para $u = e^{2x} + 1$ se tiene que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^{2x}(2) \Rightarrow \mathrm{d}u = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x$, de donde $e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$. Por lo anterior,

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x} + 1| + C = \ln(e^{2x} + 1)^{\frac{1}{2}} + C = \ln\sqrt{e^{2x} + 1} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.8 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{\operatorname{sen} 4x + 3}}\,dx$.

▼ Recordando que la derivada de la función seno es la función coseno, podemos considerar como un cambio de variable adecuado $y = \operatorname{sen} 4x + 3$.
Para $y = \operatorname{sen} 4x + 3$, $\dfrac{dy}{dx} = (\cos 4x)(4) \;\Rightarrow\; dy = 4\cos 4x\,dx$, de donde $\dfrac{1}{4}\,dy = \cos 4x\,dx$. Por lo tanto,

$$\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{\operatorname{sen} 4x + 3}}\,dx = \int \frac{\cos 4x\,dx}{(\operatorname{sen} 4x + 3)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{1}{4}\,dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + C = \frac{1}{4}(2)\sqrt{y} + C = \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{sen} 4x + 3} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.9 *Calcular la integral* $\displaystyle\int (3\cos 2x + 4\operatorname{sen} 2x)\,dx$.

▼ Aplicando el cambio de variable $\theta = 2x \;\Rightarrow\; \dfrac{d\theta}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; d\theta = 2\,dx$; de donde $dx = \frac{1}{2}\,d\theta$. Por esto,

$$\int (3\cos 2x + 4\operatorname{sen} 2x)\,dx = \int (3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\int (3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta)\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\left[3\int \cos\theta\,d\theta + 4\int \operatorname{sen}\theta\,d\theta\right] = \frac{1}{2}[3(\operatorname{sen}\theta) + 4(-\cos\theta)] + C =$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.2.10 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x - 2}{x}\,dx$.

▼ Primero separamos en dos integrales:

$$\int \frac{\ln^3 x - 2}{x}\,dx = \int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx = \int (\ln x)^3\frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x}.$$

Luego consideramos un cambio de variable $w = \ln x \;\Rightarrow\; dw = \dfrac{1}{x}\,dx = \dfrac{dx}{x}$. Entonces:

$$\int \frac{\ln^3 x - 2}{x}\,dx = \int (\ln x)^3\frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x} = \int w^3\,dw - 2\int dw = \frac{w^4}{4} - 2w + C =$$
$$= \frac{1}{4}(\ln x)^4 - 2(\ln x) + C = \frac{1}{4}\ln^4 x - \ln x^2 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.11 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^{\tan 2x} + 3}{\cos^2 2x}\,dx$.

▼ Primero consideraremos que $\dfrac{1}{\cos^2 2x} = \left(\dfrac{1}{\cos 2x}\right)^2 = \sec^2 2x$.

Luego aplicamos el cambio de variable $u = \tan 2x$.

Con $u = \tan 2x$, $\mathrm{d}u = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$ & $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \sec^2 2x\,\mathrm{d}x$. Por lo que,

$$\int \frac{e^{\tan 2x}+3}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int \left[e^{\tan 2x}+3\right]\frac{1}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int [e^{\tan 2x}+3]\sec^2 2x\,\mathrm{d}x = \int (e^u+3)\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int (e^u+3)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}[e^u+3u]+C = \frac{1}{2}e^{\tan 2x}+\frac{3}{2}\tan 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.2.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x\arctan x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

▼ Si consideramos el cambio de variable $y = \arctan x^2$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+(x^2)^2}(2x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} \;\Rightarrow\; \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

Luego entonces,

$$\int \frac{x\arctan x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\arctan x^2\right)\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int y\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2\right)+C = \frac{1}{4}\left(\arctan x^2\right)^2 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.13 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^x \operatorname{arcsen} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando el cambio de variable $t = \operatorname{arcsen} e^x$:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{d}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arcsen} e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Luego,

$$\int \frac{e^x\operatorname{arcsen} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{arcsen} e^x)\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} e^x)^2 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.14 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}+2x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

▼

$$\int \frac{e^{\arctan x}+2x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$
$$= \int e^{\arctan x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) + \int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$
$$= e^{\arctan x} + \ln\left(1+x^2\right) + \arctan x + C.$$

□

A continuación, aplicaremos cambios de variables para calcular las integrales de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. También vamos a calcular integrales cuyos resultados son las funciones arcoseno, arcotangente y arcosecante.

- Demostrar que $\displaystyle\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta = -\ln(\cos\theta) + C = \ln(\sec\theta) + C$.

▼ Considerando que $\displaystyle\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$, si usamos $x = \cos\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta$, entonces:

$$\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\int \frac{-\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln x + C = -\ln(\cos\theta) + C =$$
$$= (-1)\ln(\cos\theta) + C = \ln(\cos\theta)^{-1} + C = \ln\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + C = \ln(\sec\theta) + C.$$

Por lo tanto:

$$\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta = -\ln(\cos\theta) + C = \ln(\sec\theta) + C.$$

□

- Demostrar que $\displaystyle\int \cot\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\operatorname{sen}\theta) + C = -\ln\csc\theta + C$.

▼ Considerando que $\displaystyle\int \cot\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\theta$, si usamos ahora $x = \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$,

$$\int \cot\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C = \ln(\operatorname{sen}\theta) + C =$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\csc\theta}\right) + C = \ln(1) - \ln(\csc\theta) = -\ln\csc\theta + C.$$

Por lo tanto:

$$\int \cot\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\operatorname{sen}\theta) + C = -\ln\csc\theta + C.$$

□

- Demostrar que $\displaystyle\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$.

▼ Primero multiplicamos y dividimos al integrando por $(\sec\theta + \tan\theta)$.

$$\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{(\sec\theta)(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Luego aplicamos el cambio de variable $u = \sec\theta + \tan\theta$.

$$u = \sec\theta + \tan\theta \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta \quad \& \quad \mathrm{d}u = (\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Entonces:

$$\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) + C = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \csc\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\csc\theta - \cot\theta) + C$.

▼ Primero multiplicamos y dividimos al integrando por $(\csc\theta - \cot\theta)$.

$$\int \csc\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{(\csc\theta)(\csc\theta - \cot\theta)}{(\csc\theta - \cot\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\csc^2\theta - \csc\theta\cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Luego aplicamos el cambio de variable $y = \csc\theta - \cot\theta$:

$$y = \csc\theta - \cot\theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = -\csc\theta\cdot\cot\theta - (-\csc^2\theta) = -\csc\theta\cdot\cot\theta + \csc^2\theta \quad \& \quad \mathrm{d}y = (\csc^2\theta - \csc\theta\cdot\cot\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Y ahora:

$$\int \csc\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\csc^2\theta - \csc\theta\cdot\cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln y + C = \ln(\csc\theta - \cot\theta) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \csc\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\csc\theta - \cot\theta) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$; con $a > 0$.

▼ Considerando que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$, optamos por el desarrollo siguiente.

Ya que,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2}\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} = |a|\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} = a\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}.$$

Entonces,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{a\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}}.$$

Ahora aplicamos un cambio de variable, donde despejamos a la variable original u en términos de la nueva variable x:

$$\frac{u}{a} = x \;\Rightarrow\; u = ax \quad \& \quad \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{a}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= \operatorname{arcsen} x + C = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$.

▼ Considerando $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan x + C$, decidimos presentar el siguiente desarrollo:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{a^2\left(1 + \frac{u^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2}.$$

Aplicamos ahora un cambio de variable, donde (de nuevo) despejamos a la variable original u en función de la nueva variable x

$$\frac{u}{a} = x \;\Rightarrow\; u = ax \quad \& \quad \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\arctan x + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$; con $a > 0$.

▼ Considerando $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcsec} x + C$, optamos por el siguiente procedimiento:

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{u^2}{a^2}-1\right)} = \sqrt{a^2}\sqrt{\frac{u^2}{a^2}-1} = |a|\sqrt{\frac{u^2}{a^2}-1} = a\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1};$$

entonces,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{ua\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}}.$$

Aplicamos de nuevo el mismo cambio de variable y el mismo procedimiento que en las dos últimas demostraciones.

$$\frac{u}{a} = x \;\Rightarrow\; u = ax \quad \& \quad \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{ax\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arcsec} x + C = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

□

Observación. En las tres últimas demostraciones, no procedimos como en los ejemplos anteriores. Al realizar el cambio de variable $x = \dfrac{u}{a}$ no procedimos al cálculo de la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ sino que nuestro procedimiento fue diferente: despejamos la variable original u en términos de la nueva variable x, para luego calcular la derivada $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ y la diferencial $\mathrm{d}u$. Finalmente, después de las sustituciones pertinentes, calculamos la integral. Este procedimiento nos permite calcular integrales que de la otra manera no sería posible. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.15 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x.$

▼ Aplicamos el cambio de variable $\sqrt[3]{x-1} = y$, de donde despejamos la variable original x en función de la nueva variable y. Esto es,

$$\sqrt[3]{x-1} = y \;\Rightarrow\; x-1 = y^3 \;\Rightarrow\; x = y^3 + 1.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 3y^2$ & la diferencial $\mathrm{d}x = 3y^2\,\mathrm{d}y$. Luego sustituimos y calculamos,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int (y^3+1)y\left(3y^2\,\mathrm{d}y\right) = 3\int\left(y^3+1\right)y^3\,\mathrm{d}y = \\ &= 3\int\left(y^6+y^3\right)\mathrm{d}y = 3\left[\frac{y^7}{7}+\frac{y^4}{4}\right]+C = \\ &= \frac{3}{7}y^7+\frac{3}{4}y^4+C = \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4+C = \\ &= \frac{3}{7}(x-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.16 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando el cambio de variable $\sqrt{x-3} = w$, despejamos la variable original x en función de la nueva variable w. Esto es,

$$\sqrt{x-3} = w \;\Rightarrow\; x-3 = w^2 \;\Rightarrow\; x = w^2+3.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w} = 2w$ & la diferencial $\mathrm{d}x = 2w\,\mathrm{d}w$. Luego sustituimos y calculamos,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x &= \int\left(w^2+3\right)^2 w(2w\,\mathrm{d}w) = 2\int\left(w^4+6w^2+9\right)w^2\,\mathrm{d}w = \\ &= 2\int\left(w^6+6w^4+9w^2\right)\mathrm{d}w = 2\left[\frac{w^7}{7}+\frac{6}{5}w^5+\frac{9}{3}w^3\right]+C = \\ &= \frac{2}{7}\left(\sqrt{x-3}\right)^7+\frac{12}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5+6\left(\sqrt{x-3}\right)^3+C = \\ &= \frac{2}{7}(x-3)^{\frac{7}{2}}+\frac{12}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+6(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.17 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$.

▼ Aplicamos el cambio de variable $\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = u$, de donde despejamos la variable original x en función de la nueva variable u. Esto es,

$$\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = u \;\Rightarrow\; 2+x^{\frac{2}{3}} = u^4 \;\Rightarrow\; x^{\frac{2}{3}} = u^4-2 \;\Rightarrow\; x^2 = \left(u^4-2\right)^3 \;\Rightarrow\; x = \left(u^4-2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ & la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{3}{2}\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}\left(4u^3\right) = 6\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}u^3 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 6\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}u^3\,\mathrm{d}u.$$

Luego sustituimos y calculamos.

$$\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \left[\left(u^4-2\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}(u)6\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}u^3\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int \left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}6u^4\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = 6\int\left(u^4-2\right)u^4\,\mathrm{d}u =$$
$$= 6\int\left(u^8-2u^4\right)\mathrm{d}u = 6\left[\frac{1}{9}u^9-\frac{2}{5}u^5\right]+C =$$
$$= \frac{2}{3}\left[\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^9-\frac{12}{5}\left[\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5+C =$$
$$= \frac{2}{3}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}-\frac{12}{5}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C.$$

□

Ejemplo 2.2.18 *Calcular la integral* $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Consideramos el cambio de variable $\sqrt{1-x^2}=t$, de donde despejamos la variable original (x) en términos de la nueva variable t. Esto es,

$$\sqrt{1-x^2}=t \;\Rightarrow\; 1-x^2=t^2 \;\Rightarrow\; x^2=1-t^2 \;\Rightarrow\; x=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1-t^2}.$$

Ahora calculamos la derivada $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ & la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2t)=\frac{-t}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \& \quad \mathrm{d}x=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Al sustituir, obtenemos:

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t\,\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{\sqrt{1-t^2}}t^2\,\mathrm{d}t=$$
$$=-\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2t^2\,\mathrm{d}t=-\int\left(1-t^2\right)t^2\,\mathrm{d}t=$$
$$=-\int\left(t^2-t^4\right)\mathrm{d}t=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]+C=$$
$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+C.$$

□

Ejercicios 2.2.1 *Cambio de variable.* *Soluciones en la página 19*
Aplicando la técnica integración por cambio de variable, calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (x-1)^9\,\mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^9}}$.
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$.
4. $\int (x^2+1)^8 2x\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}\,\mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int (e^x+2)^5 e^x\,dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{(\operatorname{sen}\theta-3)^2}\,d\theta.$

9. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{(\tan\theta+1)^3}}\,d\theta.$

10. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{(x^2-x+1)^5}\,dx.$

11. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt[3]{x^2-x+1}}.$

12. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}\,d\theta.$

14. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx.$

15. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta+1}\,d\theta.$

16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

17. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsec}x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}.$

21. $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}^2\theta}\operatorname{sen}2\theta\,d\theta.$

22. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{e^x\tan e^x}{\cos^2 e^x}\,dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{e^x e^{\tan e^x}}{\cos^2 e^x}\,dx.$

27. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}\,dx.$

28. $\displaystyle\int (3x-1)^9\,dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+3)^4}}.$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+5}.$

31. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx.$

33. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}\,dx.$

34. $\displaystyle\int (e^{2x}+2)^8 e^{2x}\,dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{6\cos3\theta}{(\operatorname{sen}3\theta-2)^3}\,d\theta.$

36. $\displaystyle\int \frac{4\sec^2 5\theta}{\sqrt{(\tan5\theta+1)^3}}\,d\theta.$

37. $\displaystyle\int \frac{8(x+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^5}.$

38. $\displaystyle\int \frac{9(x^2-1)\,dx}{\sqrt[3]{x^3-3x+4}}.$

39. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{\cos2\theta+\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta-\cos2\theta}\,d\theta.$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}\,dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3\theta}{\tan3\theta+4}\,d\theta.$

43. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

44. $\displaystyle\int 2^{-x^2}x\,dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{\arctan3x}{1+9x^2}\,dx.$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^5 x}.$

47. $\displaystyle\int \frac{5\operatorname{arcsec}3x}{2x\sqrt{9x^2-1}}\,dx.$

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x^5}.$

49. $\displaystyle\int 2^{e^x}(1+2^{e^x})^5 e^x\,dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x^2}{x}\,dx.$

52. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

53. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\tan e^{2x}}{\cos^2 e^{2x}}\,dx.$

54. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}e^{\tan e^{2x}}}{\cos^2 e^{2x}}\,dx.$

55. $\displaystyle\int \frac{4e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

56. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}.$

57. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{y}}\,dy.$

58. $\displaystyle\int (3x^2+4)\sqrt{x-1}\,dx.$

59. $\displaystyle\int \frac{(t^{\frac{1}{3}}-1)^6}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt.$

60. $\displaystyle\int \frac{r^2-r}{(2r-1)^4}\,dr.$

61. $\displaystyle\int \frac{t^3+6t}{(t^2+2)^3}\,dt.$

62. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\,dy.$

63. $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt{w+1}}{2+\sqrt{w+1}}\,dw.$

64. $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x+4}}\,dx.$

65. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^r k\theta\cdot\cos k\theta\ d\theta.$

66. $\displaystyle\int \cos^r k\theta\cdot\operatorname{sen}k\theta\ d\theta.$

67. $\displaystyle\int \tan^r k\theta \cdot \sec^2 k\theta \; d\theta.$

68. $\displaystyle\int \cot^r k\theta \cdot \csc^2 k\theta \; d\theta.$

69. $\displaystyle\int \sec^r k\theta \cdot \tan k\theta \; d\theta.$

70. $\displaystyle\int \csc^r k\theta \cdot \cot k\theta \; d\theta.$

2.2.2 Cambio de variable en integrales definidas

Para resolver integrales definidas que requieran de integración por cambio de variable se puede proceder de dos maneras, que son equivalentes. Supongamos que deseamos calcular la integral definida:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x) \; dx.$$

Esta integral se puede evaluar de las formas siguientes:

1. Calcular primero la integral indefinida $\int f[g(x)]g'(x) \; dx$ por cambio de variable, y una vez que se expresa el resultado en términos de la variable original se evalúa en los límites de integración a, b.
2. Al hacer el cambio de variable $u = g(x)$ & $du = g'(x) \; dx$, los límites de integración también deben cambiar, pues ahora la variable de integración es u, que va desde $g(a)$ hasta $g(b)$, así que

$$\underbrace{\int_a^b f[g(x)]g'(x) \; dx}_{\boxed{\begin{array}{l} u = g(x); \\ du = g'(x) \; dx. \end{array}}} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \; du. \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.2.19 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_2^5 (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \; dx.$

▼

1. Calculamos primero a calcular la integral indefinida:

$$\underbrace{\int (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \; dx}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 - 4x + 3; \\ du = (2x - 4) \; dx. \end{array}}} = \int u^2 \; du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{3} + C.$$

Continuando de esta manera, tenemos:

$$\int_2^5 (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \; dx = \left[\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{3}\right]_2^5 = \frac{(25 - 20 + 3)^3}{3} - \frac{(4 - 8 + 3)^3}{3} =$$
$$= \frac{8^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{512 + 1}{3} = \frac{513}{3} = 171.$$

2. Si aplicamos la segunda forma (2.7):

$$\underbrace{\int_2^5 (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \; dx}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 - 4x + 3; \\ du = (2x - 4) \; dx; \\ u(2) = -1 \; \& \; u(5) = 8. \end{array}}} = \int_{-1}^8 u^2 \; du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^8 = \frac{8^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 171.$$

Observe que en el segundo procedimiento (2.7), al cambiar los límites de integración, se simplifica la evaluación.

□

Al emplear este método se debe tener cuidado con el intervalo de integración, pues la función integrando debe ser continua en dicho intervalo antes y después del cambio de variable. Para muestra veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.20 *Evaluar* $\int_2^3 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t$.

▼

1. Calculamos primero la integral indefinida:

$$\underbrace{\int \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{c} u = t^2-5t+6; \\ \mathrm{d}u = (2t-5)\ \mathrm{d}t. \end{array}}} = \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}(t^2-5t+6)^{\frac{3}{2}} + C.$$

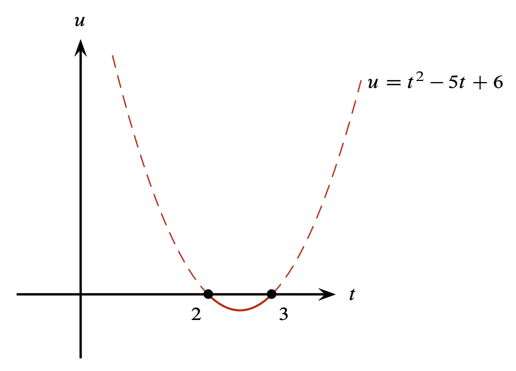
Del resultado anterior se obtiene:

$$\int_2^3 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{3}(t^2-5t+6)^{\frac{3}{2}}\bigg|_2^3 = \frac{2}{3}(3^2-5\cdot 3+6)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2^2-5\cdot 2+6)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

2. Si calculamos la integral definida haciendo la sustitución y cambiando los extremos del intervalo de acuerdo con dicha sustitución, resulta:

$$\underbrace{\int_2^3 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{c} u = t^2-5t+6; \\ \mathrm{d}u = (2t-5)\ \mathrm{d}t; \\ u(2) = 0\ \&\ u(3) = 0. \end{array}}} = \int_0^0 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = 0.$$

El resultado del cálculo se aprecia formalmente en esta última evaluación, sin embargo hay que enfatizar que dicho cálculo tiene un pequeño defecto: la función que hemos integrado no está definida en el intervalo abierto $(2, 3)$, pues involucra la raíz cuadrada de un número negativo, como puede verse en la figura.



Si bien es posible dar sentido a lo que se calculó en este ejemplo e interpretar el resultado correctamente, no lo haremos por ahora, pues implica manipular números complejos e integración con ellos, lo cual está fuera de los objetivos de este libro.

□

Ejemplo 2.2.21 *Evaluar la integral* $\int_3^5 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t.$

▼ Este ejemplo es continuación del anterior; usamos el procedimiento que consiste en cambiar variables y límites de integración:

$$\underbrace{\int_3^5 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{c} u=t^2-5t+6; \\ \mathrm{d}u=(2t-5)\ \mathrm{d}t; \\ u(3)=0\ \&\ u(5)=6; \end{array}}} = \int_0^6 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^6 = \frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(6)(6)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}.$$

En este caso la función del integrando está bien definida y es continua en el intervalo de integración $[0, 6]$.

□

Ejemplo 2.2.22 *Evaluar la integral* $\int_1^{10} \frac{x-1}{(x^2-2x)^3}\ \mathrm{d}x.$

▼ En principio puede parecer lógico el siguiente cambio de variable:

$$\underbrace{\int_1^{10} \frac{(x-1)\ \mathrm{d}x}{(x^2-2x)^3}}_{\boxed{\begin{array}{l} u=x^2-2x; \\ \mathrm{d}u=(2x-2)\ \mathrm{d}x=2(x-1)\ \mathrm{d}x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{2}=(x-1)\ \mathrm{d}x; \\ u(1)=-1\ \&\ u(10)=80. \end{array}}} = \int_{-1}^{80} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{u^3} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{80} u^{-3}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{(-2)}\Big|_{-1}^{80} = -\frac{1}{4}[80^{-2}-(-1)^{-2}].$$

Sin embargo, a pesar de que esto se vea correcto, el cálculo no lo es, pues el integrando original no está definido para $x = 2$, ni el de la integral con el cambio de variable para $u = 0$.
El resultado no es válido.

□

Como referencia futura, enunciamos a continuación el resultado que hemos aplicado en los últimos ejemplos:

2.2.3 Fórmula de cambio de variable para integrales definidas

Si $g(x)$ & $g'(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ \mathrm{d}u. \tag{2.8}$$

En el entendido de que la integral del lado derecho exista.

Ejemplo 2.2.23 *Calcular la integral definida* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\operatorname{sen}^3 x \cos x\ \mathrm{d}x.$

▼ Considerando que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x) = \cos x$, procedemos de la siguiente manera.

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\operatorname{sen}^3 x\cos x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{sen} x \Rightarrow \mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x; \\ x = 0 \Rightarrow y = \operatorname{sen} 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1. \end{array}}} = 4\int_0^1 y^3\,\mathrm{d}y = 4\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \left[y^4\right]_0^1 = $$

$$= 1^4 - 0^4 = 1.$$

□

Ejemplo 2.2.24 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\tan 2x}\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$.

▼ Al realizar el cambio de variable $w = \tan 2x$:

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\tan 2x}\sec^2 2x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} w = \tan 2x \Rightarrow dw = (\sec^2 2x)2\,\mathrm{d}x; \\ x = 0 \Rightarrow w = \tan 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{8} \Rightarrow w = \tan\frac{\pi}{4} = 1. \end{array}}} = \int_0^1 \sqrt{w}\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_0^1 w^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\left[\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left[w^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}[1] = \frac{1}{3}.$$

□

Ejemplo 2.2.25 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando que $\ln x^3 = 3\ln x$ y que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$, procedemos de la siguiente manera:

$$\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{3\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{3\int_1^e (\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}}_{\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \\ x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0; \\ x = e \Rightarrow u = \ln e = 1. \end{array}}} = 3\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = 3\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[1^2 - 0^2\right] = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}.$$

□

Ejemplo 2.2.26 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Aquí conviene eliminar $\sqrt{x}$ mediante un cambio de variable y expresar x en términos de la nueva variable:

$$\underbrace{\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2;\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=2u \Rightarrow \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u;\\ x=4 \Rightarrow u=\sqrt{4}=2;\\ x=9 \Rightarrow u=\sqrt{9}=3.\end{array}}} = \int_2^3 \frac{u-1}{u+1}(2u)\,\mathrm{d}u = 2\int_2^3 \frac{u^2-u}{u+1}\,\mathrm{d}u = 2\int_2^3\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= 2\left[\int (u-2)\,\mathrm{d}u + 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u+1}\right]_2^3 \overset{*}{=} 2\left[\frac{1}{2}(u-2)^2 + 2\ln(u+1)\right]_2^3 =$$

$$= \left[(3-2)^2 + 4\ln(3+1)\right] - \left[(2-2)^2 + 4\ln(2+1)\right] = 1 + 4\ln(4) - 4\ln(3) =$$

$$= 1 + 4\ln\left[\frac{4}{3}\right].$$

En la igualdad $\overset{*}{=}$ se realizaron implícitamente dos cambios de variable para calcular las integrales involucradas.

□

Ejemplo 2.2.27 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{(1+e^{2x})^2}$.

▼ Considerando que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+e^{2x}\right) = 2e^{2x}$, procedemos de la manera siguiente:

$$\underbrace{\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{(1+e^{2x})^2}}_{\boxed{\begin{array}{l}y=1+e^{2x} \Rightarrow \mathrm{d}y=2e^{2x}\,\mathrm{d}x;\\ x=0 \Rightarrow y=1+e^0=1+1=2;\\ x=\ln 2 \Rightarrow y=1+e^{2\ln 2}=1+e^{\ln 4}=5.\end{array}}} = \int_0^{\ln 2}\left(1+e^{2x}\right)^{-2} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \int_2^5 y^{-2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\int_2^5 y^{-2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{2-5}{10}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{-3}{10}\right] = \frac{3}{20}.$$

□

Ejemplo 2.2.28 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$.

▼ Aquí conviene considerar $\sqrt{1+\sqrt{y}}$ como una nueva variable, es decir, $x=\sqrt{1+\sqrt{y}}$; luego expresar y como función de dicha variable para calcular $\mathrm{d}y$.

$$\underbrace{\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y}_{} = \int_1^2 x(x^2-1)4x\,\mathrm{d}x = 4\int_1^2 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{1+\sqrt{y}} = x \Rightarrow 1+\sqrt{y}=x^2;\\ y=(x^2-1)^2 \Rightarrow \mathrm{d}y = 2(x^2-1)2x\,\mathrm{d}x;\\ y=0 \Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{0}}=\sqrt{1}=1;\\ y=9 \Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{9}}=\sqrt{4}=2. \end{array}}$$

$$= 4\int_1^2 (x^4-x^2)\,\mathrm{d}x = 4\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 4\left[\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)\right] =$$

$$= 4\left[\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right] = 4\left[\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right] = 4\left(\frac{93-35}{15}\right) = 4\left(\frac{58}{15}\right) = \frac{232}{15}.$$

□

Ejercicios 2.2.2 *Cambio de variable.* *Soluciones en la página 21*

Aplicando la técnica de integración por cambio de variable, calcular las siguientes integrales definidas.

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\tan^3 2x - 1}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}-1}}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{-3}^8 \sqrt{|x|+1}\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{9}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y}\,\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2}.$
6. $\displaystyle\int_0^4 \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+9}}.$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\operatorname{sen} 2x}}\,\mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x^3}}.$
11. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^x\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sec^2 3x}{1+\tan 3x}\,\mathrm{d}x.$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.$
14. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}.$
15. $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{4+9x^2}.$
16. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^3 2\theta\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta.$
17. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos^4 3\theta\operatorname{sen} 3\theta\,\mathrm{d}\theta.$
18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$
19. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\,\mathrm{d}y.$
20. $\displaystyle\int_3^6 \frac{2-\sqrt{w-2}}{\sqrt{w-2}}\,\mathrm{d}w.$
21. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+1}{1+\sqrt{x+4}}\,\mathrm{d}x.$

Ejercicios 2.2.1 *Cambio de variable.* *Preguntas, página 11*

1. $\frac{1}{10}(x-1)^{10}+C.$
2. $-\frac{2}{7\sqrt{(x-1)^7}}+C.$
3. $\ln|x-1|+C.$
4. $\frac{1}{9}\left(x^2+1\right)^9+C.$
5. $\ln\left(x^2+1\right)+C.$
6. $3\sqrt[3]{x^3+1}+C.$
7. $\frac{1}{6}\left(e^x+2\right)^6+C.$
8. $-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta-3}+C.$
9. $-\frac{2}{\sqrt{\tan\theta+1}}+C.$
10. $-\frac{1}{4\left(x^2-x+1\right)^4}+C.$
11. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}+C.$
12. $\ln|x^2-x+1|+C.$
13. $\ln|\operatorname{sen}\theta-\cos\theta|+C.$
14. $\ln|e^x+x|+C.$
15. $\ln|\tan\theta+1|+C.$
16. $\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x)^2+C.$
17. $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$
18. $2\sqrt{\ln x}+C.$
19. $\frac{1}{2}(\operatorname{arcsec}x)^2+C.$
20. $\ln|\ln x|+C.$
21. $e^{\operatorname{sen}^2\theta}+C.$
22. $\ln\left(e^x+e^{-x}\right)+C.$
23. $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$
24. $e^{\arctan x}+C.$
25. $\frac{1}{2}\left(\tan e^x\right)^2+C.$
26. $e^{\tan e^x}+C.$
27. $\frac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{\frac{3}{2}}+C.$
28. $\frac{1}{30}(3x-1)^{10}+C.$
29. $\frac{-3}{5\sqrt[3]{5x+3}}+C.$
30. $\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C.$
31. $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

32. $\ln\sqrt{x^2+1}+C$.
33. $2\sqrt[3]{2x^3+1}+C$.
34. $\dfrac{1}{18}\left(e^{2x}+2\right)^9+C$.
35. $\dfrac{-1}{(\operatorname{sen}3\theta-2)^2}+C$.
36. $\dfrac{-8}{5\sqrt{\tan 5\theta+1}}+C$.
37. $\dfrac{-1}{\left(x^2+2x+3\right)^4}+C$.
38. $\dfrac{9}{2}\sqrt[3]{\left(x^3-3x+4\right)^2}+C$.
39. $\dfrac{1}{4}\ln\left(x^4+4x^2+1\right)+C$.
40. $\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}2\theta-\cos 2\theta|+C$.
41. $\ln\dfrac{1}{|e^{-x}+x|}+C$.
42. $\dfrac{1}{3}\ln|\tan 3\theta+4|+C$.
43. $\dfrac{1}{4}(\operatorname{arcsen}2x)^2+C$.
44. $-\dfrac{2^{-x^2}}{\ln 4}+C$.
45. $\dfrac{1}{6}(\arctan 3x)^2+C$.
46. $\dfrac{-1}{4\ln^4 x}+C$.
47. $\dfrac{5}{4}(\operatorname{arcsec}3x)^2+C$.
48. $\dfrac{1}{5}\ln|\ln x|+C$.
49. $\dfrac{1}{6\ln 2}\left(1+2^{e^x}\right)^6+C$.
50. $\ln\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}+C$.
51. $\dfrac{1}{12}\ln^6 x^2+C$.
52. $\dfrac{1}{2}e^{\arctan 2x}+C$.
53. $\dfrac{1}{4}\tan^2 e^{2x}+C$.
54. $\dfrac{1}{2}e^{\tan e^{2x}}+C$.
55. $\ln\left(1+e^{2x}\right)^2+2\arctan e^x+C$.
56. $6\left[\sqrt{t^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{t^{\frac{1}{3}}-1}}\right]+C$.
57. $\dfrac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{y}}\right)^5-\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{y}}\right)^3+C$.
58. $\dfrac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}}+\dfrac{12}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{14}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$.
59. $\dfrac{3}{8}\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)^8+\dfrac{3}{7}\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)^7+C$.

60. $\dfrac{1-3(2r-1)^2}{24(2r-1)^3}+C.$
61. $-\dfrac{t^2+4}{\left(t^2+2\right)^2}+C.$
62. $\left(\sqrt{y}+1\right)^2-6\left(\sqrt{y}+1\right)+4\ln|\sqrt{y}+1|+C.$
63. $-\left(2+\sqrt{w+1}\right)^2+12\left(2+\sqrt{w+1}\right)-16\ln\left|2+\sqrt{w+1}\right|+C.$
64. $\dfrac{2}{3}\left(1+\sqrt{x+4}\right)^3-3\left(1+\sqrt{x+4}\right)^2+4\ln\left|1+\sqrt{x+4}\right|+C.$
65. $\dfrac{1}{k(r+1)}\operatorname{sen}^{r+1}k\theta+C.$
66. $\dfrac{-1}{k(r+1)}\cos^{r+1}k\theta+C.$
67. $\dfrac{1}{k(r+1)}\tan^{r+1}k\theta+C.$
68. $\dfrac{-1}{k(r+1)}\cot^{r+1}k\theta+C.$
69. $\dfrac{1}{kr}\sec^{r}k\theta+C.$
70. $\dfrac{-1}{kr}\csc^{r}k\theta+C.$

Ejercicios 2.2.2 *Cambio de variable.* *Preguntas, página 18*

1. $\dfrac{1}{4}.$
2. $-\dfrac{3}{8}.$
3. $\dfrac{16}{5}.$
4. $22.$
5. $\dfrac{1}{5}.$
6. $2.$
7. $\dfrac{\pi^2}{8}.$
8. $\dfrac{1}{3}.$
9. $\dfrac{\pi^2}{32}.$
10. $\dfrac{2}{3}.$
11. $\dfrac{4}{3}\left(4-\sqrt{2}\right).$
12. $\dfrac{\ln 2}{3}.$
13. $\dfrac{\pi}{6}.$
14. $\dfrac{\pi}{6}.$
15. $\dfrac{\pi}{24}.$
16. $0.$
17. $\dfrac{31}{160}.$
18. $\dfrac{1}{6}.$
19. $4(\ln 3-1).$
20. $1.$
21. $\dfrac{11}{3}+4\ln\left(\dfrac{4}{3}\right).$

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.3 Integración por partes

El método que presentamos en esta sección está basado en la regla para derivar un producto de funciones .

Como sabemos, si $u = f(x)$ & $v = g(x)$ son funciones derivables, entonces por la regla de la Derivada de un Producto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Luego, al integrar se obtiene:

$$\int [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int \left[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\right]\mathrm{d}x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x;$$

de donde resulta:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

A esta igualdad se le denomina fórmula de integración por partes y es esencial para calcular familias importantes de integrales.

Veamos una presentación más compacta de esta fórmula.

Dado que $u = f(x)$ & $v = g(x)$, entonces $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$ & $\mathrm{d}v = g'(x)\,\mathrm{d}x$; luego, la igualdad

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

es equivalente a

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u. \tag{2.2}$$

Esta presentación de la fórmula de integración por partes es la que generalmente se usa en el cálculo de determinadas integrales.

¿Cómo aplicar esta fórmula para calcular una integral arbitraria?

- Calcular la integral indefinida $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Se considera que el integrando $f(x)\,\mathrm{d}x$ es, precisamente, $u\,\mathrm{d}v$, para así seleccionar u & $\mathrm{d}v$. Es evidente que $\mathrm{d}x$ formará parte de la diferencial $\mathrm{d}v$.

  Al seleccionar u & $\mathrm{d}v$ debemos cuidar que el cálculo de $v = \int \mathrm{d}v$ sea factible; el cálculo de $\mathrm{d}u$ no presenta dificultad. Hecha la selección de u & $\mathrm{d}v$ y habiendo calculado $\mathrm{d}u$ & $v = \int \mathrm{d}v$, se aplica la fórmula de integración por partes

  $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

  y aquí debemos cuidar que el cálculo de $\int v\,\mathrm{d}u$ sea factible y no sea más complejo que la integral original.

Ejemplo 2.3.1 *Calcular la integral* $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

▼ Si seleccionamos

$$u = x \quad \& \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x,$$

entonces:

$$\underbrace{\int xe^x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = e^x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.2 *Calcular la integral* $\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$.

▼ Si seleccionamos

$$u = x \quad \& \quad \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x,$$

entonces,

$$\underbrace{\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = -\cos x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = x(-\cos x) - \int -\cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.3 *Calcular la integral* $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

▼ Seleccionando $u = x$ & $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

Encontramos:

$$\underbrace{\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = x\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(-\cos 2x) + C = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.4 *Calcular la integral* $\int x\sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Si seleccionamos $u = x$ & $\mathrm{d}v = \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x = \int (3x+2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}},$$

tenemos:

$$\underbrace{\int x\sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}. \end{array}}} = x\left(\frac{2}{9}\right)(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{9}x(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}\int (3x+2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)(3x+2)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{5}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{9}x(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135}(3x+2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

□

Ejemplo 2.3.5 *Calcular la integral* $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

▼ Sin duda alguna $u = \ln x$ & $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, por lo que : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ & $v = \int \mathrm{d}x = x$.

Luego,

$$\underbrace{\int \ln x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = \ln x & \& & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} & \& & v = x. \end{array}}} = (\ln x)x - \int x\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

□

Ejemplo 2.3.6 *Calcular la integral* $\int \arctan x \, dx$.

▼ Es evidente que $u = \arctan x$ & $dv = dx$, por lo que $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ & $v = x$.

Entonces,

$$\underbrace{\int \arctan x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = \arctan x & \& & dv = dx; \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & \& & v = x. \end{array}}} = (\arctan x)x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C.$$

□

Para calcular ciertas integrales, es necesario aplicar más de una vez el método de integración por partes. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.7 *Calcular la integral* $\int x^2 e^{-2x} \, dx$.

▼ Se sugiere recordar el cálculo de la integral $\int xe^x \, dx$ en el ejemplo 2.3.1.

Seleccionando $u = x^2$ & $dv = e^{-2x}\,dx$, $du = 2x\,dx$ & $v = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Entonces,

$$\underbrace{\int x^2 e^{-2x}\,dx}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x^2 & \& & dv = e^{-2x}\,dx; \\ du = 2x\,dx & \& & v = -\frac{1}{2}e^{-2x}. \end{array}}} = x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx. \quad (*)$$

Para evaluar $\int xe^{-2x}\,dx$, se aplica nuevamente integración por partes.

$$\underbrace{\int xe^{-2x}\,dx}_{\boxed{\begin{array}{ccc} \hat{u} = x & \& & d\hat{v} = e^{-2x}\,dx; \\ d\hat{u} = dx & \& & \hat{v} = -\frac{1}{2}e^{-2x}. \end{array}}} = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Al considerar este resultado en (*), obtenemos

$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C.$$

□

Ejemplo 2.3.8 *Calcular la integral* $\int 4x^2 \cos 2x \, dx$.

▼ Recordemos las integrales de los ejemplos 2.3.2 y 2.3.3.

Seleccionamos $u = x^2 \quad \& \quad dv = \cos 2x \, dx \Rightarrow du = 2x \, dx \quad \& \quad v = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

Entonces,

$$\underbrace{\int 4x^2 \cos 2x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^2 & \& & dv = \cos 2x; \\ du = 2x\,dx & \& & v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x. \end{array}}} = 4 \int x^2 \cos 2x \, dx = 4\left[uv - \int v \, du\right] =$$

$$= 4\left[x^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) 2x \, dx\right] =$$

$$= 2x^2 \operatorname{sen} 2x - 4 \int x \operatorname{sen} 2x \, dx. \tag{*}$$

Para evaluar $\int x \operatorname{sen} 2x \, dx$, se aplica nuevamente integración por partes.

$$\underbrace{\int x \operatorname{sen} 2x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} \hat{u} = x & \& & d\hat{v} = \operatorname{sen} 2x\,dx; \\ d\hat{u} = dx & \& & \hat{v} = -\frac{1}{2}\cos 2x. \end{array}}} = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$$

Al considerar este resultado en (*), obtenemos

$$\int 4x^2 \cos 2x \, dx = 2x^2 \operatorname{sen} 2x - 4\int x \operatorname{sen} 2x \, dx = 2x^2 \operatorname{sen} 2x - 4\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right] + C =$$
$$= 2x^2 \operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x - \operatorname{sen} 2x + C = (2x^2 - 1)\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.9 *Calcular la integral* $\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x}} \, dx$.

▼ Recordemos cómo calculamos la integral del ejemplo 2.3.4:

Seleccionando $u = x^2 \quad \& \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$:

$$du = 2x \, dx \quad \& \quad v = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int (1-x)^{-\frac{1}{2}} \, dx = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces,

$$\underbrace{\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^2 & \& & \mathrm{d}v = (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x & \& & v = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}. \end{array}}} = -3\int x^2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -3\left[uv - \int v\,\mathrm{d}u\right] =$$

$$= -3\left[x^2(-2)(1-x)^{\frac{1}{2}} - \int -2(1-x)^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= 6x^2(1-x)^{\frac{1}{2}} - 12\int x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Se aplica nuevamente integración por partes para evaluar $\int x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$.

$$\underbrace{\int x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} \hat{u} = x & \& & \mathrm{d}\hat{v} = (1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}\hat{u} = \mathrm{d}x & \& & \hat{v} = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}. \end{array}}} = x\left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int (1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)(1-x)^{\frac{5}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}.$$

Al considerar este resultado en (2.3), obtenemos:

$$\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = 6x^2(1-x)^{\frac{1}{2}} - 12\left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right] + C =$$

$$= 6x^2(1-x)^{\frac{1}{2}} + 8x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= 2(1-x)^{\frac{1}{2}}\left[3x^2 + 4x(1-x) + \frac{8}{5}(1-x)^2\right] + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{1-x}\,\left[3x^2 + 4x + 8\right] + C.$$

□

Ejemplo 2.3.10 *Calcular la integral* $\int x^4 \ln 3x\,\mathrm{d}x$.

▼ Recordemos cómo calculamos $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ en el ejemplo 2.3.5.

Seleccionando $u = \ln 3x \quad \& \quad \mathrm{d}v = x^4\,\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3x}(3) = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \& \quad v = \int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}.$$

Entonces,

$$\underbrace{\int x^4 \ln 3x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = \ln 3x & \& & dv = x^4\, dx; \\ du = \dfrac{dx}{x} & \& & v = \dfrac{x^5}{5}. \end{array}}} = \int (\ln 3x) x^4 \, dx = (\ln 3x)\frac{x^5}{5} - \int \frac{x^5}{5}\frac{dx}{x} = \frac{x^5}{5}\ln 3x - \frac{1}{5}\int x^4\, dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln 3x - \frac{1}{5}\left(\frac{x^5}{5}\right) + C = \frac{x^5}{5}\left(\ln 3x - \frac{1}{5}\right) + C = \frac{x^5}{5^2}(5\ln 3x - 1) + C.$$

□

Los ejemplos anteriores nos muestran cómo aplicar el método de integración por partes para calcular integrales pertenecientes a importantes familias de integrales y nos indican además cómo seleccionar u, dv.

El tratamiento general de estas familias de integrales se presenta a continuación, donde suponemos que n es un número natural, a, k son constantes arbitrarias & r es un número racional $r \neq -1$.

1.

$$\underbrace{\int x^n e^{ax} \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = x^n & \& & dv = e^{ax}\, dx; \\ du = nx^{n-1}\, dx & \& & v = \displaystyle\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}. \end{array}}} = x^n\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int \frac{1}{a}e^{ax}(nx^{n-1})\, dx =$$

$$= x^n\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u al factor polinomial.

2.

$$\underbrace{\int x^n \operatorname{sen} ax \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = x^n & \& & dv = \operatorname{sen} ax\, dx; \\ du = nx^{n-1}\, dx & \& & v = \displaystyle\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax. \end{array}}} = x^n\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)(nx^{n-1})\, dx =$$

$$= -x^n\left(\frac{\cos ax}{a}\right) + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u al factor polinomial.

3.

$$\underbrace{\int x^n \cos ax \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = x^n & \& & dv = \cos ax\, dx; \\ du = nx^{n-1}\, dx & \& & v = \displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax. \end{array}}} = x^n\left(\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax\right)(nx^{n-1})\, dx =$$

$$= x^n\left(\frac{\operatorname{sen} ax}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\, dx.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u al factor polinomial.

4.

$$\underbrace{\int x^n(ax+b)^r\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = x^n & \& & \mathrm{d}v = (ax+b)^r\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x & \& & v = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}. \end{array}}} = x^n\left[\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}\right] - \int \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}nx^{n-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x^n\frac{(ax+b)^{r+1}}{a(r+1)} - \frac{n}{a(r+1)}\int x^{n-1}(ax+b)^{r+1}\,\mathrm{d}x.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u el factor polinomial.

Observación 1. En las 4 familias tratadas, se aplica n veces el método de integración por partes y siempre seleccionando como u el factor polinomial.

Observación 2. Cualquier integral de la última familia $\int x^n(ax+b)^r\,\mathrm{d}x$ puede ser calculada mediante un cambio de variable:

$$ax+b = y \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{a}(y-b) \quad \& \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y.$$

Por lo que,

$$\int x^n(ax+b)^r\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^n}(y-b)^n y^r\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{a^{n+1}}\int (y-b)^n y^r\,\mathrm{d}y.$$

Después de desarrollar $(y-b)^n$, se efectúa el producto $(y-b)^n y^r$ para luego obtener una suma de integrales.

5.

$$\underbrace{\int x^r\ln ax\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = \ln ax & \& & \mathrm{d}v = x^r\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{ax}(a\,\mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} & \& & v = \frac{x^{r+1}}{r+1}. \end{array}}} = (\ln ax)\frac{x^{r+1}}{r+1} - \int \frac{x^{r+1}}{r+1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{1}{r+1}\int x^r\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{1}{r+1}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) + C =$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C.$$

En este caso, la integral se calcula aplicando integración por partes una sola vez.

Para terminar con las grandes familias de integrales, a continuación trataremos dos tipos de integrales que se calculan aplicando primeramente 2 veces el método de integración por partes y procediendo posteriormente de una manera muy particular.

6.
$$\underbrace{\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = e^{ax} & \& & \mathrm{d}v = \operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x & \& & v = -\frac{1}{k}\cos kx. \end{array}}} = e^{ax}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right) - \int\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)ae^{ax}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx + \frac{a}{k}\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Para evaluar $\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x$, se aplica de nuevo integración por partes manteniendo la selección $u = e^{ax}$.

$$\underbrace{\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = e^{ax} & \& & \mathrm{d}v = \cos kx\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x & \& & v = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kx. \end{array}}} = e^{ax}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx\right) - \int\frac{1}{k}(\operatorname{sen} kx)ae^{ax}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx - \frac{a}{k}\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x.$$

Utilizamos esta igualdad en (2.4) y obtenemos

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx + \frac{a}{k}\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx + \frac{a}{k}\left[\frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx - \frac{a}{k}\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx + \frac{ae^{ax}}{k^2}\operatorname{sen} kx - \frac{a^2}{k^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Esta es una ecuación en que la incógnita es $I = \int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x$.

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx + \frac{ae^{ax}}{k^2}\operatorname{sen} kx - \frac{a^2}{k^2}I \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; I + \frac{a^2}{k^2}I &= \frac{ae^{ax}}{k^2}\operatorname{sen} kx - \frac{e^{ax}}{k}\cos kx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)I &= \frac{ae^{ax}}{k^2}\operatorname{sen} kx - \frac{ke^{ax}}{k^2}\cos kx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \left(\frac{k^2 + a^2}{k^2}\right)I &= \frac{e^{ax}}{k^2}[a\operatorname{sen} kx - k\cos kx] \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; I &= \left(\frac{k^2}{k^2 + a^2}\right)\frac{e^{ax}}{k^2}(a\operatorname{sen} kx - k\cos kx) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; I &= \frac{e^{ax}}{k^2 + a^2}(a\operatorname{sen} kx - k\cos kx).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{k^2 + a^2}(a\operatorname{sen} kx - k\cos kx) + C.$$

7.

$$\underbrace{\int e^{ax}\cos kx\,dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = e^{ax} & \& & dv = \cos kx\,dx; \\ du = ae^{ax}\,dx & \& & v = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kx. \end{array}}} = e^{ax}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx\right) - \int \frac{1}{k}(\operatorname{sen} kx)ae^{ax}\,dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx - \frac{a}{k}\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,dx.$$

Para evaluar $\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,dx$, se aplica de nuevo integración por partes con la selección $u = e^{ax}$.

$$u = e^{ax} \quad \& \quad dv = \operatorname{sen} kx\,dx \;\Rightarrow\; du = ae^{ax}\,dx \quad \& \quad v = -\frac{1}{k}\cos kx.$$

Entonces,

$$\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx - \frac{a}{k}\left[-\frac{e^{ax}}{k}\cos kx - \int -\frac{1}{k}(\cos kx)ae^{ax}\,dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx + \frac{ae^{ax}}{k^2}\cos kx - \frac{a^2}{k^2}\int e^{ax}\cos kx\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{ke^{ax}}{k^2}\operatorname{sen} kx + \frac{ae^{ax}}{k^2}\cos kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k^2 + a^2}{k^2}\right)\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{e^{ax}}{k^2}(k\operatorname{sen} kx + a\cos kx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{e^{ax}}{k^2 + a^2}(k\operatorname{sen} kx + a\cos kx) + C.$$

Comentarios adicionales.

- En las integrales de los tipos (1.), (2.), (3.), (4.), suponiendo que $n \geqslant 2$, las igualdades obtenidas pueden tomarse como fórmulas de recurrencia y ser aplicadas n veces para obtener la integral resuelta.
- Existen integrales que no pertenecen a ninguna de estas familias; sin embargo mediante la aplicación de un cambio de variable, obtenemos una de ellas.
- Existen integrales que, sin pertenecer a estas familias, se calculan mediante integración por partes y con procedimientos similares a los utilizados.

Ejemplo 2.3.11 *Calcular la integral* $\int \sec^3\theta\,d\theta$.

▼ Primero consideramos que $\sec^3\theta = \sec\theta\cdot\sec^2\theta$ y luego aplicamos integración por partes seleccionando

$$u = \sec\theta \quad \& \quad dv = \sec^2\theta\,d\theta.$$

A saber

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \int \sec\theta\cdot\sec^2\theta\,d\theta = \underbrace{uv - \int v\,du}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = \sec\theta & \& & dv = \sec^2\theta\,d\theta; \\ du = \sec\theta\cdot\tan\theta\,d\theta & \& & v = \tan\theta. \end{array}}} =$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\,d\theta =$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan^2\theta\cdot\sec\theta\,d\theta.$$

Ahora aplicamos la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$.

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int(\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int(\sec^3\theta - \sec\theta)\, d\theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int\sec^3\theta\, d\theta + \int\sec\theta\, d\theta.$$

Por último, despejamos la integral $\int \sec^3\theta\, d\theta$:

$$\int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta + \int\sec\theta\, d\theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\int\sec^3\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}[\sec\theta\cdot\tan\theta + \ln(\sec\theta+\tan\theta)] + C.$$

□

Ejemplo 2.3.12 *Calcular la integral* $\int e^{\sqrt[3]{t}}\, dt$.

▼ Primero aplicamos un cambio de variable; si $\sqrt[3]{t} = x$, entonces $t = x^3$ & $dt = 3x^2\, dx$. Luego,

$$\int e^{\sqrt[3]{t}}\, dt = \int e^x 3x^2\, dx = 3\int x^2 e^x\, dx.$$

Aplicamos dos veces integración por partes, o bien aplicamos dos veces la fórmula de recurrencia obtenida en 1. (pág. 7) para $a = 1$. Primero con $n = 2$,

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2\left(\frac{e^x}{1}\right) - \frac{2}{1}\int x^{2-1}e^x\, dx = x^2e^x - 2\int xe^x\, dx.$$

Luego con $n = 1$,

$$\int x^2e^x\, dx = x^2e^x - 2\left[x^1e^x - \int x^{1-1}e^x\, dx\right] = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\, dx\right] = x^2e^x - 2\,(xe^x - e^x) =$$
$$= \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x.$$

Finalmente, rescatando el cambio de variable,

$$\int e^{\sqrt[3]{t}}\, dt = 3\int x^2e^x\, dx = 3\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C = 3\left[\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 - 2\left(\sqrt[3]{t}\right) + 2\right]e^{\sqrt[3]{t}} + C =$$
$$= 3\left[\sqrt[3]{t^2} - 2\sqrt[3]{t} + 2\right]e^{\sqrt[3]{t}} + C.$$

□

Ejemplo 2.3.13 *Calcular la integral* $\int \cos(\ln x)\, dx$.

▼ Primero aplicamos un cambio de variable: si $\ln x = y$, entonces $x = e^y$ & $dx = e^y\, dy$. Así,

$$\int\cos(\ln x)\, dx = \int\cos(y)\cdot e^y\, dy = \int e^y\cos y\, dy.$$

Ahora aplicamos la fórmula obtenida en 7. (pág. 10) para $a = 1$ & $k = 1$.

$$\int e^y\cos y\, dy = \frac{e^y}{1^2+1^2}(1\operatorname{sen} y + 1\cos y) + C = \frac{e^y}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int e^y \cos y\,dy = \frac{e^y}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y) + C = \frac{1}{2}e^{\ln x}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + C =$$
$$= \frac{1}{2}x[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + C = \frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

□

Ejemplo 2.3.14 *Calcular la integral* $\int x^4(x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx$.

▼ Aplicamos repetidamente la formula obtenida en 4. (pág. 8). Obtenemos:

$$\int x^4(x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^4(x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{4}{\frac{1}{3}+1}\int x^3(x-2)^{\frac{1}{3}+1}\,dx =$$
$$= \frac{3x^4(x-2)^{\frac{4}{3}}}{4} - 3\int x^3(x-2)^{\frac{4}{3}}\,dx =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - 3\left[\frac{x^3(x-2)^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{3}{\frac{4}{3}+1}\int x^2(x-2)^{\frac{4}{3}+1}\,dx\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{3x^3(x-2)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{9}{\frac{7}{3}}\left[\frac{x^2(x-2)^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1} - \frac{2}{\frac{7}{3}+1}\int x(x-2)^{\frac{7}{3}+1}\,dx\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{27}{7}\left[\frac{x^2(x-2)^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - \frac{2}{\frac{10}{3}}\int x(x-2)^{\frac{10}{3}}\,dx\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{162}{70}\left[\frac{x(x-2)^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1} - \frac{1}{\frac{10}{3}+1}\int (x-2)^{\frac{10}{3}+1}\,dx\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{162}{70}\cdot\frac{x(x-2)^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} + \frac{162}{70}\cdot\frac{3}{13}\int (x-2)^{\frac{13}{3}}\,dx =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{486}{910}x(x-2)^{\frac{13}{3}} + \frac{486}{910}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{16}{3}}}{\frac{16}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{243}{455}x(x-2)^{\frac{13}{3}} + \frac{729}{7\,280}(x-2)^{\frac{16}{3}} + C.$$

□

Como se mencionó en páginas anteriores, otra manera de calcular esta integral es aplicando un cambio de variable. A saber:

$$x - 2 = y \;\Rightarrow\; x = y + 2 \quad \& \quad dx = dy.$$

Luego,

$$\int x^4(x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int (y+2)^4 y^{\frac{1}{3}}\,dy = \int \left(y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16\right) y^{\frac{1}{3}}\,dy =$$
$$= \int \left(y^{\frac{13}{3}} + 8y^{\frac{10}{3}} + 24y^{\frac{7}{3}} + 32y^{\frac{4}{3}} + 16y^{\frac{1}{3}}\right)dy =$$
$$= \frac{3}{16}y^{\frac{16}{3}} + 8\left(\frac{3}{13}\right)y^{\frac{13}{3}} + 24\left(\frac{3}{10}\right)y^{\frac{10}{3}} + 32\left(\frac{3}{7}\right)y^{\frac{7}{3}} + 16\left(\frac{3}{4}\right)y^{\frac{4}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{16}(x-2)^{\frac{16}{3}} + \frac{24}{13}(x-2)^{\frac{13}{3}} + \frac{36}{5}(x-2)^{\frac{10}{3}} + \frac{96}{7}(x-2)^{\frac{7}{3}} + 12(x-2)^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= 3(x-2)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{16}(x-2)^4 + \frac{8}{13}(x-2)^3 + \frac{12}{5}(x-2)^2 + \frac{32}{7}(x-2) + 4\right] + C.$$

Cerramos esta sección con algunos ejemplos de aplicación de la integración por partes para integrales definidas. En este caso se deben evaluar los productos intermedios de la integración en los extremos del intervalo como sigue:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.3.15 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x.$

▼ Para poder aplicar integración por partes expresamos el numerador x^3 del integrando como el producto $x^3 = \dfrac{x^2}{2}\cdot 2x$. Usamos:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x^2}{2} & \& \quad \mathrm{d}v = \dfrac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x & \& \quad v = \displaystyle\int \frac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \frac{-1}{2(1+x^2)^2}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{4}\frac{-1}{(1+x^2)^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-x\,\mathrm{d}x}{2(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{1^2}{4}\left(\frac{-1}{2^2}\right) + \frac{0^2}{4}\left(\frac{1}{1^2}\right) + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} \overset{(*)}{=} \\
&= \frac{-1}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{-1}{(1+x^2)}\Big|_0^1 = \frac{-1}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{1+0^2}\right) = \\
&= \frac{-1}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

En las dos últimas integraciones marcadas con $(*)$ hemos usado:

$$z = 1 + x^2 \Rightarrow \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = \int z^{-n}\,\mathrm{d}z = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}},$$

donde $n = 3$; $n = 2$, respectivamente.

□

Ejemplo 2.3.16 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_3^8 x^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$

▼ Podemos aplicar la fórmula 4. (pág. 8) con $r = \dfrac{1}{2}$ & $n = 2$ para obtener:

$$\int_3^8 x^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_3^8 - \frac{2}{\frac{3}{2}}\int_3^8 x(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}\left[64(9)^{\frac{3}{2}} - 9(4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{3}\left[\frac{x(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_3^8 - \frac{1}{\frac{5}{2}}\int_3^8 (x+1)^{\frac{5}{2}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3}[64(27) - 9(8)] - \frac{8}{15}\left[8(9)^{\frac{5}{2}} - 3(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\Big|_3^8\right] =$$

$$= 1\,104 - \frac{8}{15}\left[8(243) - 3(32) - \frac{2}{7}\left(9^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}}\right)\right] =$$

$$= 1\,104 - \frac{8}{15}\left(\frac{8\,818}{7}\right) = 1\,104 - \frac{70\,544}{105} = \frac{45\,376}{105}.$$

□

Ejercicios 2.3.1 *Integración por partes.* *Soluciones en la página 16*
Calcular las siguientes integrales indefinidas y derivando verificar cada resultado.

1. $\int x \operatorname{sen} x\,dx.$
2. $\int x \cos x\,dx.$
3. $\int x e^{-x}\,dx.$
4. $\int x \ln x\,dx.$
5. $\int x(x+1)^{99}\,dx.$
6. $\int 4x^2 \cos 2x\,dx.$
7. $\int 9x^2 e^{3x}\,dx.$
8. $\int 4x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx.$
9. $\int 8x^2\sqrt{2x+1}\,dx.$
10. $\int x^3 \ln x^2\,dx.$
11. $\int \theta \sec^2\theta\,d\theta.$
12. $\int y 2^{-y}\,dy.$
13. $\int 5y^2 3^{2y}\,dy.$
14. $\int \frac{3u-2}{\sqrt{5-4u}}\,du.$
15. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}}\,dx.$
16. $\int \frac{u^3\,du}{\sqrt{u^2-1}}.$
17. $\int x^2 e^{-x}\,dx.$
18. $\int x e^{-x^2}\,dx.$
19. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$
20. $\int e^{-2x}\cos 3x\,dx.$
21. $\int e^{3x}\operatorname{sen} 2x\,dx.$
22. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$
23. $\int \sec^5 x\,dx.$
24. $\int (\ln t^2 + 1)\,dt.$
25. $\int \ln(t^2+1)\,dt.$
26. $\int (\ln^2 t + 1)\,dt.$
27. $\int \operatorname{arcsen} x\,dx.$
28. $\int \arccos 2x\,dx.$
29. $\int \arctan 2x\,dx.$
30. $\int \operatorname{arccot} x\,dx.$

Aplicando las fórmulas recursivas, calcular las integrales que siguen:

Observación. En el siguiente bloque de ejercicios, del 31. al 54., haremos uso de las siguientes fórmulas (de recurrencia), que anteriormente hemos obtenido.

Con a, b, k constantes, n natural & r racional ($r \neq -1$):

a. $\int x^n e^{ax}\,dx = x^n\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$

b. $\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx = -x^n\left(\frac{\cos ax}{a}\right) + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx.$

c. $\displaystyle\int x^n \cos ax \, \mathrm{d}x = x^n \left(\frac{\operatorname{sen} ax}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \operatorname{sen} ax \, \mathrm{d}x.$

d. $\displaystyle\int x^n (ax+b)^r \, \mathrm{d}x = x^n \frac{(ax+b)^r}{a(r+1)} - \frac{n}{a(r+1)}\int x^{n-1}(ax+b)^{r+1} \, \mathrm{d}x.$

e. $\displaystyle\int x^r \ln ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C.$

f. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} kx \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+k^2}(a \operatorname{sen} k - k \cos kx) + C.$

g. $\displaystyle\int e^{ax} \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+k^2}(k \operatorname{sen} k + a \cos kx) + C.$

31. $\displaystyle\int x^3 e^{2x} \, \mathrm{d}x.$

32. $\displaystyle\int x^4 e^{-x} \, \mathrm{d}x.$

33. $\displaystyle\int x^5 e^{x} \, \mathrm{d}x.$

34. $\displaystyle\int x^3 \cos 2x \, \mathrm{d}x.$

35. $\displaystyle\int x^4 \operatorname{sen} 3x \, \mathrm{d}x.$

36. $\displaystyle\int x^5 \cos x \, \mathrm{d}x.$

37. $\displaystyle\int x^3 (3x+2)^5 \, \mathrm{d}x.$

38. $\displaystyle\int x^4 \sqrt{2x-3} \, \mathrm{d}x.$

39. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x.$

40. $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x \, \mathrm{d}x.$

41. $\displaystyle\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x.$

42. $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{2}} \cos 4x \, \mathrm{d}x.$

43. $\displaystyle\int x^5 \ln 3x \, \mathrm{d}x.$

44. $\displaystyle\int x^{-4} \ln x^3 \, \mathrm{d}x.$

45. $\displaystyle\int \sqrt{x^5} \ln 3x^2 \, \mathrm{d}x.$

46. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{2x} \, \mathrm{d}x.$

47. $\displaystyle\int_0^{1} x^3 e^{-x} \, \mathrm{d}x.$

48. $\displaystyle\int_0^{1} x^3 e^{x} \, \mathrm{d}x.$

49. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x.$

50. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^3 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x.$

51. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos x \, \mathrm{d}x.$

52. $\displaystyle\int_0^{1} x^3 (2x-1)^5 \, \mathrm{d}x.$

53. $\displaystyle\int_2^{5} x^4 \sqrt{x-1} \, \mathrm{d}x.$

54. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x^3}{\sqrt{2x+1}} \, \mathrm{d}x.$

Ejercicios 2.3.1 *Integración por partes.* *Preguntas, página 14*

1. $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$
2. $x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$
3. $-(x+1)e^{-x} + C.$
4. $\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$
5. $\frac{1}{100}(x+1)^{100}\left(x - \frac{x+1}{101}\right) + C.$
6. $\left(2x^2 - 1\right)\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x + C.$
7. $\left(3x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)e^{3x} + C.$
8. $-2x^2\cos 2x + 2x\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + C.$
9. $\frac{8}{3}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{105}(2x+1)^{\frac{7}{2}} + C.$
10. $\frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C.$
11. $\theta \cdot \tan\theta - \ln|\sec\theta| + C.$
12. $-\frac{2^{-y}}{\ln 2}\left(y + \frac{1}{\ln 2}\right) + C.$
13. $\frac{5}{\ln 9}y^2\,3^{2y} - \frac{10}{(\ln 9)^2}y\,3^{2y} + \frac{10}{(\ln 9)^3}\,3^{2y} + C.$
14. $-\frac{1}{2}(2-3u)(5-4u)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\,(5-4u)^{\frac{3}{2}} + C.$
15. $\sqrt{u^2-1} + C.$
16. $u^2\sqrt{u^2-1} - \frac{2}{3}\sqrt{\left(u^2-1\right)^3} + C.$
17. $-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C.$
18. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$
19. $-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{-x^2} + C.$
20. $\frac{1}{13}e^{-2x}(3\operatorname{sen} 3x - 2\cos 3x) + C.$
21. $\frac{1}{13}e^{3x}(3\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x) + C.$
22. $\frac{x}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C.$
23. $\frac{1}{4}\sec^3 x\ \tan x + \frac{3}{8}\left[\sec x\ \tan x + \ln(\sec x + \tan x)\right] + C.$
24. $t\left(\ln t^2 - 1\right) + C.$
25. $t\ln\left(t^2+1\right) - 2t + 2\arctan t + C.$
26. $t\left(\ln^2 t - \ln t^2 + 3\right) + C.$
27. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$
28. $x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{\arccos 2x} + C.$
29. $x\arctan 2x - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C.$

30. $x \operatorname{arccot} x + \ln\sqrt{1+x^2} + C$.

Aplicando las fórmulas recursivas calcular las siguientes integrales.

31. $\frac{e^{2x}}{8}\left(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3\right) + C$.
32. $-e^{-x}\left(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24\right) + C$.
33. $e^x\left(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120\right) + C$.
34. $\frac{x}{4}\left(2x^2 - 3\right)\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8}\left(2x^2 - 1\right)\cos 2x + C$.
35. $\frac{1}{81}\left(-27x^4 + 36x^2 - 8\right)\cos 3x + \frac{4x}{27}\left(3x^2 - 8\right)\operatorname{sen} 3x + C$.
36. $x\left(x^4 - 20x^2 + 120\right)\operatorname{sen} x + 5\left(x^4 - 12x^2 + 24\right)\cos x + C$.
37. $\frac{x^3}{8}(3x+2)^6 - \frac{x^2}{126}(3x+2)^7 + \frac{x}{1\,512}(3x+2)^8 - \frac{1}{40\,824}(3x+2)^9 + C$.
38. $\frac{x^4}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4x^3}{15}(2x-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{35}(2x-3)^{\frac{7}{2}} - \frac{8x}{315}(2x-3)^{\frac{9}{2}} + \frac{8}{3\,465}(2x-3)^{\frac{11}{2}} + C$.
39. $\frac{2}{11}(x+1)^{\frac{11}{2}} - \frac{10}{9}(x+1)^{\frac{9}{2}} + \frac{20}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - 4(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$.
40. $\frac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$.
41. $-\frac{e^{-x}}{5}(\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x) + C$.
42. $\frac{2}{65}e^{-\frac{x}{2}}(8\operatorname{sen} 4x - \cos 4x) + C$.
43. $\frac{x^6}{6}\left(\ln 3x - \frac{1}{6}\right) + C$.
44. $-x^{-3}\left(\ln x + \frac{1}{3}\right) + C$.
45. $\frac{2}{49}x^{\frac{7}{2}}\left(7\ln 3x^2 - 4\right) + C$.
46. $\frac{1}{8}(e-2)$.
47. $\frac{6e-16}{e}$.
48. $6 - 2e$.
49. $\frac{1}{4}(\pi^2 - 8)$.
50. 0.22036.
51. 0.04712.
52. $\frac{17}{252}$.
53. 1 098.385 .
54. $\frac{836}{35}$.

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

2.4 Integración de potencias de funciones trigonométricas

Trataremos ahora las técnicas de integración que permiten calcular integrales de funciones que son potencias de funciones trigonométricas, así como productos o cocientes de este tipo de funciones.
En el desarrollo de estas técnicas es relevante el uso de algunas identidades trigonométricas así como la aplicación de cambios de variable adecuados. Es importante también tener presente que si n es un número natural, entonces n, $2n-1$, $2n$, $2n+1$ y $2n+2$ son enteros positivos, con $2n$ y $2n+2$ pares y $2n-1$ y $2n+1$ impares.
Desarrollaremos estas técnicas de integración mostrando cómo resolver grandes familias de integrales.

2.4.1 Integrales $\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

- Cuando $m = 1$:

  $$\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx = \int \operatorname{sen}^r \cos x \, dx,$$

  que se calcula mediante un cambio de variable.

  Si $y = \operatorname{sen} x$, entonces $dy = \cos x \, dx$. Por lo tanto:

  1. Para $r \neq -1$

     $$\int \operatorname{sen}^r x \cos x \, dx = \int y^r \, dy = \frac{y^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1}\operatorname{sen}^{r+1} x + C.$$

  2. Para $r = -1$

     $$\int \operatorname{sen}^r x \cos x \, dx = \int y^{-1} \, dy = \int \frac{dy}{y} = \ln y + C = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$$

canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

- Cuando $m > 1$, expresamos el impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural. En este caso:
$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n+1} x \, dx,$$
que calculamos de la manera siguiente.

Primero separamos un factor $\cos x$ y lo colocamos junto a la diferencial dx.
$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n} x \cos x \, dx.$$
Luego consideramos que $\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Resulta:
$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n} x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x (\cos^2 x)^n \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^n \cos x \, dx.$$
Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \operatorname{sen} x$ & $dy = \cos x \, dx$. Entonces:
$$\int \operatorname{sen}^r x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^n \cos x \, dx = \int y^r (1 - y^2)^n \, dy.$$
Debido a que n es un número natural ($n = 1, 2, 3, ...$), podemos obtener el desarrollo de $(1 - y^2)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^r. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es,
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n} x \cos x \, dx &= \int \operatorname{sen}^r x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^n \cos x \, dx = \int y^r (1 - y^2)^n \, dy = \\ &= \int y^r \left(1 - ny^2 + \frac{n(n-1)}{2} y^4 - \cdots + (-1)^n y^{2n}\right) dy = \\ &= \int \left(y^r - ny^{r+2} + \frac{n(n-1)}{2} y^{r+4} - \cdots + (-1)^n y^{r+2n}\right) dy = \\ &= \int y^r \, dy - n \int y^{r+2} \, dy + \frac{n(n-1)}{2} \int y^{r+4} \, dy - \cdots + (-1)^n \int y^{r+2n} \, dy = \\ &= \frac{y^{r+1}}{r+1} - n\frac{y^{r+3}}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{y^{r+5}}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1} + C.\end{aligned}$$
Donde $r + k \neq 0$, para $k = 1, 3, 5, ..., (2n + 1)$.

Consideramos el cambio de variable realizado ($y = \operatorname{sen} x$) para así tener la solución de la integral:
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx &= \int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n+1} x \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{r+1} x}{r+1} - n\frac{\operatorname{sen}^{r+3} x}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\operatorname{sen}^{r+5} x}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{\operatorname{sen}^{r+2n+1} x}{r+2n+1} + C.\end{aligned}$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.1 *Calcular la integral* $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx$.

▼ Primero separamos un factor $\cos x$ y lo colocamos junto a la diferencial dx.
$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^4 x \cos x \, dx.$$

Luego consideramos que $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ y la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Resulta:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^4 x\cos x\ dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x}(\cos^2 x)^2\cos x\ dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x}(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cos x\ dx.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$ & $dy = \cos x\ dx$:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cos x\ dx = \int \sqrt{y}(1-y^2)^2\ dy.$$

Desarrollamos $(1-y^2)^2$, luego multiplicamos por $\sqrt{y}$ para posteriormente integrar:

$$\int \sqrt{y}(1-y^2)^2\ dy = \int y^{1/2}(1-2y^2+y^4)\ dy = \int (y^{1/2}-2y^{5/2}+y^{9/2})\ dy =$$
$$= \int y^{1/2}\ dy - 2\int y^{5/2}\ dy + \int y^{9/2}\ dy = \frac{2}{3}y^{3/2} - 2\left(\frac{2}{7}\right)y^{7/2} + \frac{2}{11}y^{11/2} + C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \operatorname{sen} x$) y concluimos:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^5 x\ dx = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}x - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}x + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}x + C.$$

□

Ahora veamos cómo proceder ante una integral definida.

Ejemplo 2.4.2 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^5 x\ dx.$

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida está dada por

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^5 x\ dx = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}x - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}x + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^5 x\ dx = \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}x - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}x + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}x\right]_0^{\pi/2} =$$
$$= \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}\frac{\pi}{2} - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}(0) - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}(0) + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}(0)\right] =$$
$$= \left[\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{4}{7}(1)^{7/2} + \frac{2}{11}(1)^{11/2}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{3/2} - \frac{4}{7}(0)^{7/2} + \frac{2}{11}(0)^{11/2}\right] =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2}{11} - 0 = \frac{154-132+42}{231} = \frac{64}{231}.$$

□

- Cuando $m > 1$ (impar) & $r = 0$, las integrales son del tipo

$$\int \operatorname{sen}^r x\cos^m x\ dx = \int \operatorname{sen}^0 x\cos^{2n+1} x\ dx = \int \cos^{2n+1} x\ dx.$$

Ejemplo 2.4.3 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \cos^7 2x\ dx.$

▼ En esta integral no aparece el factor seno, pero la función coseno tiene un exponente entero positivo impar; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando. Primero separamos un factor $\cos 2x$:

$$\int \cos^7 2x\ dx = \int \cos^6 2x\cos 2x\ dx.$$

Luego consideramos que $\cos^6 x = (\cos^2 2x)^3$ y la identidad $\cos^2 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 2x$. Resulta:

$$\int \cos^7 2x \, dx = \int \cos^6 2x \cos 2x \, dx = \int (\cos^2 2x)^3 \cos 2x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)^3 \cos 2x \, dx.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \operatorname{sen} 2x$ & $dy = 2\cos 2x \, dx$. Entonces:

$$\int \cos^7 2x \, dx = \int (\cos^2 2x)^3 \cos 2x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)^3 \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 - y^2)^3 \, dy.$$

Desarrollamos $(1 - y^2)^3$ para luego integrar

$$\frac{1}{2}\int (1 - y^2)^3 \, dy = \frac{1}{2}\int (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) \, dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left(y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7\right) + C = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{10}y^5 - \frac{1}{14}y^7 + C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \operatorname{sen} 2x$) y concluimos:

$$\int \cos^7 2x \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5 2x - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.4.4 *Calcular la integral definida* $\int_0^{\pi/12} \cos^7 2x \, dx$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida está dada por

$$\int \cos^7 2x \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5 2x - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7 2x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\int_0^{\pi/12} \cos^7 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5 2x - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7 2x\right]_0^{\pi/12} =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{6} + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5\frac{\pi}{6} - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7\frac{\pi}{6}\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{3}{10}(0)^5 - \frac{1}{14}(0)^7\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^8 =$$
$$= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2^6}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^8}\right) = \frac{1}{2^8}\left[2^6 - 2^4 + \frac{3}{5}(2)^2 - \frac{1}{7}\right] = \frac{1}{2^8}\left[\frac{1\,759}{35}\right] = \frac{1\,759}{8\,960}.$$

□

2.4.2 Integrales $\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \, dx$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

- Cuando $m = 1$:

  $$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \, dx = \int \cos^r x \operatorname{sen} x \, dx,$$

  que se calcula mediante un cambio de variable.

  Si $y = \cos x$, entonces $dy = -\operatorname{sen} x \, dx$. Por lo tanto,

1. Para $r \neq -1$:

$$\int \cos^r x \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = -\int y^r \ \mathrm{d}y = -\frac{y^{r+1}}{r+1} + C = -\frac{1}{r+1}\cos^{r+1} x + C.$$

2. Para $r = -1$:

$$\int \cos^r x \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = -\int y^{-1} \ \mathrm{d}y = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\ln y + C = -\ln(\cos x) + C = \ln(\sec x) + C.$$

- Cuando $m > 1$, expresamos al impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \ \mathrm{d}x = \int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n+1} x \ \mathrm{d}x,$$

que calculamos de la siguiente manera.

Primero separamos un factor $\operatorname{sen} x$:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \ \mathrm{d}x = \int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n} x \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\operatorname{sen}^{2n} x = (\operatorname{sen}^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n} x \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = \int \cos^r x (\operatorname{sen}^2 x)^n \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = \int \cos^r x (1 - \cos^2 x)^n \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el mismo cambio de variable $y = \cos x$ & $\mathrm{d}y = -\operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$. Así:

$$\int \cos^r x (1 - \cos^2 x)^n \ \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = -\int y^r \ (1 - y^2)^n \ \mathrm{d}y.$$

Donde se aprecia que, salvo el signo negativo, hemos llegado a lo obtenido en el caso 2.4.1. Procedemos entonces a desarrollar $(1 - y^2)^n$, para luego multiplicar cada término por y^r; obtenemos la integral de una suma algebraica de funciones, que igualamos a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es,

$$\begin{aligned}
-\int y^r (1 - y^2)^n \ \mathrm{d}y &= -\int y^r \left(1 - ny^2 + \frac{n(n-1)}{2} y^4 - \cdots + (-1)^n y^{2n}\right) \mathrm{d}y = \\
&= -\int \left(y^r - ny^{r+2} + \frac{n(n-1)}{2} y^{r+4} - \cdots + (-1)^n y^{r+2n}\right) \mathrm{d}y = \\
&= -\left(\int y^r \ \mathrm{d}y - n\int y^{r+2} \ \mathrm{d}y + \frac{n(n-1)}{2}\int y^{r+4} \ \mathrm{d}y - \cdots + (-1)^n \int y^{r+2n} \ \mathrm{d}y\right) = \\
&= -\left(\frac{y^{r+1}}{r+1} - n\frac{y^{r+3}}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{y^{r+5}}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Donde $r + k \neq 0$ para $k = 1, 3, 5, \cdots, (2n + 1)$.

Consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cos x$) para así tener la solución de la integral. Esto es,

$$\begin{aligned}
\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \ \mathrm{d}x &= \int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n+1} x \ \mathrm{d}x = \\
&= -\left(\frac{\cos^{r+1} x}{r+1} - n\frac{\cos^{r+3} x}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\cos^{r+5} x}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{\cos^{r+2n+1} x}{r+2n+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.5 *Calcular la integral* $\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \ \mathrm{d}t$.

▼ Primero separamos un factor $\operatorname{sen} kt$:

$$\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \ \mathrm{d}t = \int \cos^4 kt \operatorname{sen}^2 kt \ \operatorname{sen} kt \ \mathrm{d}t.$$

Luego consideramos la identidad $\operatorname{sen}^2 kt = 1 - \cos^2 kt$.

$$\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \ \mathrm{d}t = \int \cos^4 kt \operatorname{sen}^2 kt \ \operatorname{sen} kt \ \mathrm{d}t = \int \cos^4 kt (1 - \cos^2 kt) \ \operatorname{sen} kt \ \mathrm{d}t.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable: $y = \cos kt$ & $\mathrm{d}y = -k \operatorname{sen} kt \ \mathrm{d}t$. Entonces:

$$\int \cos^4 kt (1 - \cos^2 kt) \operatorname{sen} kt \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{k} \int y^4 (1 - y^2) \ \mathrm{d}y = \ = -\frac{1}{k} \int (y^4 - y^6) \ \mathrm{d}y = -\frac{1}{k} \left(\frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7 \right) + C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado $(y = \cos kt)$ y concluimos

$$\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \ \mathrm{d}t = \frac{1}{7k} \cos^7 kt - \frac{1}{5k} \cos^5 kt + C.$$

□

Ejemplo 2.4.6 *Calcular la integral* $\int_0^{\pi/3} \cos^4 3t \operatorname{sen}^3 3t \ \mathrm{d}t$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Si en el ejemplo anterior consideramos $k = 3$, entonces la integral indefinida ya está calculada y además está dada por:

$$\int \cos^4 3t \operatorname{sen}^3 3t \ \mathrm{d}t = \frac{1}{21} \cos^7 3t - \frac{1}{15} \cos^5 3t + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \cos^4 3t \operatorname{sen}^3 3t \ \mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{21} \cos^7 3t - \frac{1}{15} \cos^5 3t \right]_0^{\pi/3} = \\
&= \left[\frac{1}{21} \cos^7 \pi - \frac{1}{15} \cos^5 \pi \right] - \left[\frac{1}{21} \cos^7 (0) - \frac{1}{15} \cos^5 (0) \right] = \\
&= \left[\frac{1}{21} (-1)^7 - \frac{1}{15} (-1)^5 \right] - \left[\frac{1}{21} (1)^7 - \frac{1}{15} (1)^7 \right] = \\
&= -\frac{1}{21} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} - \frac{2}{21} = \frac{4}{105}.
\end{aligned}$$

□

- Cuando $m > 1$ (impar) & $r = 0$, se tienen integrales del tipo:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \, \mathrm{d}x = \int \cos^0 x \operatorname{sen}^{2n+1} x \ \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^{2n+1} x \ \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.4.7 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen}^5 \frac{t}{2} \ \mathrm{d}t$.

▼ En esta integral no aparece el factor coseno, pero la función seno tiene un exponente entero positivo impar; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando.

Primero separamos un factor $\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ y lo colocamos junto a la diferencial dt.

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,dt = \int \operatorname{sen}^4\frac{t}{2}\,\operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,dt.$$

Luego consideramos que $\operatorname{sen}^4\frac{t}{2} = \left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\right)^2$ y la identidad $\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} = 1-\cos^2\frac{t}{2}$:

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,dt = \int \operatorname{sen}^4\frac{t}{2}\,\operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,dt = \int \left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,dt = \int \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,dt.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \cos\frac{t}{2}$ & $dy = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt$. Entonces:

$$\int \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,dt = -2\int (1-y^2)^2\,dy = -2\int (1-2y^2+y^4)\,dy =$$
$$= -2\left(y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right)+C = -2y+\frac{4}{3}y^3-\frac{2}{5}y^5+C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y=\cos\frac{t}{2}$) y concluimos:

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,dt = -2\cos\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\frac{2}{5}\cos^5\frac{t}{2}+C.$$

□

Ejemplo 2.4.8 *Calcular la integral* $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,dt$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida está dada por

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,dt = -2\cos\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\frac{2}{5}\cos^5\frac{t}{2}+C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,dt = \left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\frac{2}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= \left[-2\cos\pi+\frac{4}{3}\cos^3\pi-\frac{2}{5}\cos^5\pi\right]-\left[-2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\cos^5\frac{\pi}{2}\right] =$$
$$= (-2)(-1)+\frac{4}{3}(-1)^3-\frac{2}{5}(-1)^5+2(0)-\frac{4}{3}(0)^3+\frac{2}{5}(0)^5 = 2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5} = \frac{16}{15}.$$

□

2.4.3 Integrales $\int \operatorname{sen}^{2n}x\,dx$, $\int \cos^{2m}x\,dx$ & $\int \operatorname{sen}^{2n}x\cos^{2m}x\,dx$; donde $n, m \in \mathbb{N}$

En estas familias de integrales, las funciones seno y coseno están afectadas por exponentes enteros positivos pares $(2m, 2n)$. Para calcular estas integrales se aplican las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \& \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

La aplicación de estas identidades se realiza tantas veces como sea necesario, hasta obtener integrales casi inmediatas de la forma $\int \cos 2kx\,dx$, con k natural; o bien integrales que pertenezcan a las familias anteriormente tratadas, en cuyo caso se aplicará el procedimiento correspondiente.

Ejemplo 2.4.9 *Calcular las integrales* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$ & $\displaystyle\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

▼ Para la primera integral, aplicaremos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y para la segunda, la identidad $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos 2x \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C;$$
$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \cos 2x \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C.$$

□

Ejemplo 2.4.10 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

▼ Aplicamos a la vez las identidades $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen}^2 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}[1-\cos 2(2x)] \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.$$

Hemos aplicamos la identidad $\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}[1-\cos(2\cdot 2x)] = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$. □

Ejemplo 2.4.11 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 2x \, \mathrm{d}x$.

▼ Aplicaremos primero la identidad $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1}{2}(1-\cos 2u)$ y luego $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$.

$$\int \operatorname{sen}^4 2x \, \mathrm{d}x = \int (\operatorname{sen}^2 2x)^2 \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}[1-\cos(2\cdot 2x)]\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-\cos 4x)^2 \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x - (2)\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \int \cos^2 4x \, \mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x + \int \frac{1}{2}[1+\cos(2\cdot 4x)]\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x) \, \mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x\right) + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 8x + C.$$

□

Ejemplo 2.4.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x \, \mathrm{d}x$.

▼ Aplicamos a la vez las identidades $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$ y $\cos^2 w = \frac{1}{2}(1 + \cos 2w)$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x \, \mathrm{d}x &= \int (\operatorname{sen}^2 2x)(\cos^2 2x)^2 \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\frac{1}{4}(1 + \cos 4x)^2 \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x)(1 + \cos 4x)(1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (1 - \cos^2 4x)(1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{8}\int (\operatorname{sen}^2 4x)(1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left[\int \operatorname{sen}^2 4x \, \mathrm{d}x + \int (\operatorname{sen} 4x)^2 \cos 4x \, \mathrm{d}x\right] = \\ &= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen} 4x)^2 4\cos 4x \, \mathrm{d}x\right] = \\ &= \frac{1}{16}\left[x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x\right] + \frac{1}{32}\frac{(\operatorname{sen} 4x)^3}{3} + C = \frac{1}{16}\left[x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 4x\right] + C.\end{aligned}$$

□

2.4.4 Integrales $\int \tan^r x \sec^m x \, \mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ par

- Cuando $m = 2$,

$$\int \tan^r x \sec^m x \, \mathrm{d}x = \int \tan^r x \sec^2 x \, \mathrm{d}x,$$

que se calcula mediante un cambio de variable. Si $y = \tan x$, entonces $\mathrm{d}y = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

1. Para $r \neq -1$, $\displaystyle\int \tan^r x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int y^r \, \mathrm{d}y = \frac{y^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1}\tan^{r+1} x + C$.
2. Para $r = -1$, $\displaystyle\int \tan^r x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int y^{-1} \, \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln y + C = \ln(\tan x) + C$.

- Cuando $m > 2$, expresamos el natural par m como $m = 2n + 2$, donde n es un número natural.

En este caso:

$$\int \tan^r x \sec^m x \, \mathrm{d}x = \int \tan^r x \sec^{2n+2} x \, \mathrm{d}x,$$

que calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec^2 x$ para escribirlo junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int \tan^r x \sec^{2n+2} x \, \mathrm{d}x = \int \tan^r x \sec^{2n} x \sec^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Como $\sec^{2n} x = (\sec^2 x)^n$, entonces utilizamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Así:

$$\int \tan^r x \sec^{2n} x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int \tan^r x \,(\sec^2 x)^n \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int \tan^r x (1 + \tan^2 x)^n \sec^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}y = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

$$\int \tan^r x (1 + \tan^2 x)^n \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int y^r (1 + y^2)^n \, \mathrm{d}y.$$

Y debido a que n es un número natural ($n = 1, 2, 3, \ldots$), podemos obtener el desarrollo de $(1 + y^2)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^r. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas

funciones. Esto es,

$$\begin{aligned}\int y^r(1+y^2)^n\,\mathrm{d}y &= \int y^r\left(1+ny^2+\frac{n(n-1)}{2}y^4+\cdots+y^{2n}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int\left(y^r+ny^{r+2}+\frac{n(n-1)}{2}y^{r+4}+\cdots+y^{r+2n}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int y^r\,\mathrm{d}y+n\int y^{r+2}\,\mathrm{d}y+\frac{n(n-1)}{2}\int y^{r+4}\,\mathrm{d}y+\cdots+\int y^{r+2n}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{y^{r+1}}{r+1}+n\frac{y^{r+3}}{r+3}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{y^{r+5}}{r+5}+\cdots+\frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1}+C,\end{aligned}$$

siempre y cuando $r+k\neq 0$, para $k=1,3,5,\ldots,(2n+1)$.

Recuperamos el cambio de variable realizado ($y=\tan x$), para obtener la solución de la integral:

$$\int \tan^r x\sec^m x\,\mathrm{d}x = \frac{\tan^{r+1}x}{r+1}+n\frac{\tan^{r+3}x}{r+3}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\tan^{r+5}x}{r+5}+\cdots+\frac{\tan^{r+2n+1}x}{r+2n+1}+C.$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.13 *Calcular la integral* $\int\sqrt{\tan x}\sec^6 x\,\mathrm{d}x$.

▼ Primero separamos un factor $\sec^2 x$ y lo escribimos junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int\sqrt{\tan x}\sec^6 x\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{\tan x}\sec^4 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\sec^4 x=(\sec^2 x)^2$ y la identidad $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$.

$$\int\sqrt{\tan x}\sec^4 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{\tan x}\,(\sec^2 x)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{\tan x}(1+\tan^2 x)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable: $y=\tan x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$:

$$\int\sqrt{\tan x}(1+\tan^2 x)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{y}(1+y^2)^2\,\mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1+y^2)^2$ y luego multiplicamos por $\sqrt{y}$, para posteriormente integrar

$$\begin{aligned}\int\sqrt{y}\,(1+y^2)^2\,\mathrm{d}y &= \int y^{1/2}\,(1+2y^2+y^4)\,\mathrm{d}y = \int(y^{1/2}+2y^{5/2}+y^{9/2})\,\mathrm{d}y = \\ &= \int y^{1/2}\,\mathrm{d}y+2\int y^{5/2}\,\mathrm{d}y+\int y^{9/2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}y^{3/2}+2\left(\frac{2}{7}\right)y^{7/2}+\frac{2}{11}y^{11/2}+C.\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y=\tan x$) y concluimos

$$\int\sqrt{\tan x}\sec^6 x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\tan^{3/2}x+\frac{4}{7}\tan^{7/2}x+\frac{2}{11}\tan^{11/2}x+C.$$

□

Ahora veamos cómo proceder ante una integral definida.

Ejemplo 2.4.14 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{\tan x}\sec^6 x\ \mathrm{d}x$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida es

$$\int\sqrt{\tan x}\sec^6 x\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\tan^{3/2}x + \frac{4}{7}\tan^{7/2}x + \frac{2}{11}\tan^{11/2}x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\tan x}\sec^6 x\ \mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}\tan^{3/2}x + \frac{4}{7}\tan^{7/2}x + \frac{2}{11}\tan^{11/2}x\right]_0^{\pi/4} = \\ &= \left[\frac{2}{3}\tan^{3/2}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{7}\tan^{7/2}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{11}\tan^{11/2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \\ &\qquad - \left[\frac{2}{3}\tan^{3/2}(0) + \frac{4}{7}\tan^{7/2}(0) + \frac{2}{11}\tan^{11/2}(0)\right] = \\ &= \left[\frac{2}{3}(1)^{3/2} + \frac{4}{7}(1)^{7/2} + \frac{2}{11}(1)^{11/2}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{3/2} + \frac{4}{7}(0)^{7/2} + \frac{2}{11}(0)^{11/2}\right] = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{2}{11} - 0 = \frac{154 + 132 + 42}{231} = \frac{328}{231}.\end{aligned}$$

□

- Cuando $m > 2$ (par) & $r = 0$, las integrales son del tipo

$$\int\tan^r x\sec^m x\ \mathrm{d}x = \int\tan^0 x\sec^{2n+2}x\ \mathrm{d}x = \int\sec^{2n+2}x\ \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.4.15 *Calcular la integral* $\displaystyle\int\sec^8 2x\ \mathrm{d}x$.

▼ En esta integral no aparece el factor tangente, pero la función secante tiene un exponente entero positivo par; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando. Primero separamos un factor $\sec^2 2x$:

$$\int\sec^8 2x\ \mathrm{d}x = \int\sec^6 2x\sec^2 2x\ \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\sec^6 2x = (\sec^2 2x)^3$ y la identidad $\sec^2 2x = 1 + \tan^2 2x$. Por lo tanto:

$$\int\sec^8 2x\ \mathrm{d}x = \int\sec^6 2x\sec^2 2x\ \mathrm{d}x = \int(\sec^2 2x)^3\sec^2 2x\ \mathrm{d}x = \int(1 + \tan^2 2x)^3\sec^2 2x\ \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \tan 2x \Rightarrow \mathrm{d}y = 2\sec^2 2x\ \mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int(1 + \tan^2 2x)^3\sec^2 2x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1 + y^2)^3\ \mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1 + y^2)^3$ para luego integrar

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int(1 + y^2)^3\ \mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int(1 + 3y^2 + 3y^4 + y^6)\ \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\left(y + y^3 + \frac{3}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7\right) + C = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{10}y^5 + \frac{1}{14}y^7 + C.\end{aligned}$$

Finalmente, recuperamos el cambio de variable realizado ($y = \tan 2x$) y concluimos

$$\int\sec^8 2x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{2}\tan^3 2x + \frac{3}{10}\tan^5 2x + \frac{1}{14}\tan^7 2x + C.$$

□

2.4.5 Integrales $\int \cot^r x \csc^m x \ dx$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ par

- Cuando $m = 2$,
$$\int \cot^r x \csc^m x \ dx = \int \cot^r x \csc^2 x \ dx,$$
que se calcula mediante un cambio de variable. Si $y = \cot x$, entonces $dy = -\csc^2 x \ dx$. Por lo tanto:
  1. Para $r \neq -1$, $\int \cot^r x \csc^2 x \ dx = -\int y^r \ dy = -\dfrac{y^{r+1}}{r+1} + C = -\dfrac{1}{r+1}\cot^{r+1} x + C$.
  2. Para $r = -1$, $\int \cot^r x \csc^2 x \ dx = -\int y^{-1} \ dy = -\int \dfrac{dy}{y} = -\ln y + C = -\ln(\cot x) + C$.

- Cuando $m > 2$, expresamos al natural par m como $m = 2n + 2$, donde n es un número natural. En este caso:
$$\int \cot^r x \csc^m x \ dx = \int \cot^r x \csc^{2n+2} x \ dx,$$
que calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\csc^2 x$:
$$\int \cot^r x \csc^{2n+2} x \ dx = \int \cot^r x \csc^{2n} x \csc^2 x \ dx.$$
Luego consideramos que $\csc^{2n} x = (\csc^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.
$$\int \cot^r x \csc^{2n} x \csc^2 x \ dx = \int \cot^r x \, (\csc^2 x)^n \csc^2 x \ dx = \int \cot^r x (1 + \cot^2 x)^n \csc^2 x \ dx.$$
Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \cot x \ \Rightarrow \ dy = -\csc^2 x \ dx$. Entonces:
$$\int \cot^r x (1 + \cot^2 x)^n \csc^2 x \ dx = -\int y^r (1 + y^2)^n \ dy.$$
Y notamos que, salvo el signo negativo, hemos llegado a lo obtenido en el caso próximo anterior. Procedemos entonces a desarrollar $(1 + y^2)^n$, para luego multiplicar cada término por y^r; obtenemos la integral de una suma algebraica de funciones, que igualamos a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es,
$$\begin{aligned}
-\int y^r (1+y^2)^n \ dy &= -\int y^r \left(1 + ny^2 + \frac{n(n-1)}{2} y^4 + \cdots + y^{2n}\right) dy = \\
&= -\int \left(y^r + ny^{r+2} + \frac{n(n-1)}{2} y^{r+4} + \cdots + y^{r+2n}\right) dy = \\
&= -\left(\int y^r \ dy + n \int y^{r+2} \ dy + \frac{n(n-1)}{2} \int y^{r+4} \ dy + \cdots + \int y^{r+2n} \ dy\right) = \\
&= -\left(\frac{y^{r+1}}{r+1} + n\frac{y^{r+3}}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{y^{r+5}}{r+5} + \cdots + \frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1}\right),
\end{aligned}$$
siempre y cuando $r + k \neq 0$ para $k = 1, 3, 5, \ldots, (2n+1)$. Siendo este el caso, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cot x$) para así tener la solución de la integral. Esto es,
$$\int \cot^r x \csc^m x \ dx = -\left(\frac{\cot^{r+1} x}{r+1} + n\frac{\cot^{r+3} x}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\cot^{r+5} x}{r+5} + \cdots + \frac{\cot^{r+2n+1} x}{r+2n+1}\right) + C.$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.16 *Calcular la integral* $\int \cot^3 x \csc^6 x \ dx$.

▼ Calculamos esta integral de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\csc^2 x$ para escribirlo junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int \cot^3 x \csc^6 x \, \mathrm{d}x = \int \cot^3 x \csc^4 x \csc^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\csc^4 x = (\csc^2 x)^2$ y utilizamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

$$\int \cot^3 x \csc^4 x \csc^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cot^3 x (\csc^2 x)^2 \csc^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cot^3 x (1 + \cot^2 x)^2 \csc^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Aplicamos el cambio de variable: $y = \cot x \Rightarrow \mathrm{d}y = -\csc^2 x \, \mathrm{d}x$. Luego desarrollamos $(1 + y^2)^2$ y multiplicamos por y^3, para posteriormente integrar. Entonces:

$$\int \cot^3 x (1 + \cot^2 x)^2 \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\int y^3 (1 + y^2)^2 \, \mathrm{d}y = -\int y^3 \left(1 + 2y^2 + y^4\right) \mathrm{d}y =$$
$$= -\int \left(y^3 + 2y^5 + y^7\right) \mathrm{d}y = -\left(\frac{y^4}{4} + 2\frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8}\right) + C.$$

Finalmente, recuperamos el cambio de variable realizado ($y = \cot x$) para así tener la solución de la integral. Esto es,

$$\int \cot^3 x \csc^6 x \, \mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{3}\cot^6 x + \frac{1}{8}\cot^8 x\right) + C.$$

□

- Cuando $m > 2$ & $r = 0$ se tienen integrandos donde no aparece el factor cotangente. Estas integrales son del tipo:

$$\int \cot^r x \csc^m x \, \mathrm{d}x = \int \cot^0 x \csc^{2n+2} x \, \mathrm{d}x = \int \csc^{2n+2} x \, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.4.17 *Calcular la integral* $\int \csc^6 3x \, \mathrm{d}x$.

▼ En esta integral no aparece el factor cotangente, pero la función cosecante tiene un exponente entero positivo par; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando. Primero separamos un factor $\csc^2 3x$, para escribirlo junto a la diferencial $\mathrm{d}x$. Esto es:

$$\int \csc^6 3x \, \mathrm{d}x = \int \csc^4 3x \csc^2 3x \, \mathrm{d}x.$$

Usamos $\csc^4 3x = (\csc^2 3x)^2$ y la identidad $\csc^2 3x = 1 + \cot^2 3x$:

$$\int \csc^6 x \, \mathrm{d}x = \int \csc^4 3x \csc^2 3x \, \mathrm{d}x = \int (\csc^2 3x)^2 \csc^2 3x \, \mathrm{d}x = \int (1 + \cot^2 3x)^2 \csc^2 3x \, \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable: $y = \cot 3x \Rightarrow \mathrm{d}y = -3 \csc^2 3x \, \mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int (1 + \cot^2 3x)^2 \csc^2 3x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \int (1 + y^2)^2 \, \mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1 + y^2)^2$ para luego integrar

$$-\frac{1}{3} \int (1 + y^2)^2 \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{3} \int (1 + 2y^2 + y^4) \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{3} \left(y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right) + C =$$
$$= -\frac{1}{3}y - \frac{2}{9}y^3 - \frac{1}{15}y^5 + C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cot 3x$) y concluimos

$$\int \csc^6 3x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \cot 3x - \frac{2}{9} \cot^3 3x - \frac{1}{15} \cot^5 3x + C.$$

□

2.4.6 Integrales $\int \sec^r x \tan^m x \, dx$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

- Cuando $m = 1$,

$$\int \sec^r x \tan^m x \, dx = \int \sec^r x \tan x \, dx,$$

que se calcula de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec x$, para escribirlo junto a $\tan x \, dx$:

$$\int \sec^r x \, \tan x \, dx = \int (\sec x)^r \, \tan x \, dx = \int (\sec x)^{r-1} \sec x \, \tan x \, dx.$$

Esto se calcula mediante un cambio de variable. Si $y = \sec x$, entonces $dy = \sec x \, \tan x \, dx$. Por lo tanto:

1. Para $r \neq 0$, $\displaystyle\int \sec^r x \, \tan x \, dx = \int y^{r-1} \, dy = \frac{y^r}{r} + C = \frac{1}{r}\sec^r x + C$.
2. Para $r = 0$, $\displaystyle\int \sec^r x \, \tan x \, dx = \int \sec^0 x \tan x \, dx = \int \tan x \, dx = \ln(\sec x) + C$.

- Cuando $m > 1$, expresamos al impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural.

En este caso:

$$\int \sec^r x \tan^m x \, dx = \int \sec^r x \tan^{2n+1} x \, dx,$$

que calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec x$ y un factor $\tan x$ para escribirlos junto a la diferencial dx.

$$\int \sec^r x \tan^{2n+1} x \, dx = \int \sec^{r-1} x \tan^{2n} x \, \sec x \, \tan x \, dx.$$

Luego consideramos que $\tan^{2n} x = (\tan^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\int \sec^r x \tan^{2n+1} x \, dx = \int \sec^{r-1} x \tan^{2n} x \, \sec x \, \tan x \, dx =$$
$$= \int (\sec x)^{r-1} (\tan^2 x)^n \, \sec x \, \tan x \, dx = \int (\sec x)^{r-1} (\sec^2 x - 1)^n \, \sec x \, \tan x \, dx.$$

Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \sec x \Rightarrow dy = \sec x \, \tan x \, dx$. Entonces:

$$\int (\sec x)^{r-1} (\sec^2 x - 1)^n \sec x \, \tan x \, dx = \int y^{r-1} (y^2 - 1)^n \, dy.$$

Y como en los casos anteriores, debido a que n es un número natural ($n = 1, 2, 3, \ldots$), podemos obtener el desarrollo de $(y^2 - 1)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^{r-1}. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es, se procede como en los casos anteriormente tratados. Finalmente, se concluye considerando el cambio de variable realizado.

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.18 *Calcular la integral* $\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, dx$.

▼ En este caso:

$$\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, dx = \int \sec^{3/2} x \tan^5 x \, dx,$$

la cual calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec x$ y un factor $\tan x$ para escribirlos junto a la diferencial dx.

$$\int \sec^{3/2} x \tan^5 x \, dx = \int \sec^{1/2} x \tan^4 x \, \sec x \, \tan x \, dx.$$

Luego consideramos que $\tan^4 x = (\tan^2 x)^2$ y utilizamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\int \sec^{3/2} x \tan^5 x \,\mathrm{d}x = \int \sec^{1/2} x \tan^4 x \,\sec x \,\tan x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int (\sec x)^{1/2} (\tan^2 x)^2 \,\sec x \,\tan x \,\mathrm{d}x = \int (\sec x)^{1/2} (\sec^2 x - 1)^2 \,\sec x \,\tan x \,\mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \sec x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = \sec x \,\tan x \,\mathrm{d}x$:

$$\int (\sec x)^{1/2} (\sec^2 x - 1)^2 \sec x \,\tan x \,\mathrm{d}x = \int y^{1/2} (y^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(y^2 - 1)^2$, luego multiplicamos cada uno de sus tres términos por el factor $y^{1/2}$, obtenemos la integral de una suma algebraica de funciones e integramos.

$$\int y^{1/2} (y^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}y = \int y^{1/2} (y^4 - 2y^2 + 1) \,\mathrm{d}y =$$
$$= \int (y^{9/2} - 2y^{5/2} + y^{1/2}) \,\mathrm{d}y = \frac{2}{11} y^{11/2} - (2)\frac{2}{7} y^{7/2} + \frac{2}{3} y^{3/2} + C.$$

Para concluir, consideramos el cambio de variable realizado $y = \sec x$.

$$\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{11} \sec^{11/2} x - \frac{4}{7} \sec^{7/2} x + \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + C.$$

□

Otro ejemplo con una integral definida.

Ejemplo 2.4.19 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \,\mathrm{d}x$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida es

$$\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{11} \sec^{11/2} x - \frac{4}{7} \sec^{7/2} x + \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{11} \sec^{11/2} x - \frac{4}{7} \sec^{7/2} x + \frac{2}{3} \sec^{3/2} x\right]_0^{\pi/3} =$$
$$= \left[\frac{2}{11}(\sec \frac{\pi}{3})^{11/2} - \frac{4}{7}(\sec \frac{\pi}{3})^{7/2} + \frac{2}{3}(\sec \frac{\pi}{3})^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{11}(\sec 0)^{11/2} - \frac{4}{7}(\sec 0)^{7/2} + \frac{2}{3}(\sec 0)^{3/2}\right] =$$
$$= \left[\frac{2}{11}(2)^{11/2} - \frac{4}{7}(2)^{7/2} + \frac{2}{3}(2)^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{11}(1)^{11/2} - \frac{4}{7}(1)^{7/2} + \frac{2}{3}(1)^{3/2}\right] =$$
$$= \left[\frac{2}{11}(2^5\sqrt{2}) - \frac{4}{7}(2^3\sqrt{2}) + \frac{2}{3}(2\sqrt{2})\right] - \left[\frac{2}{11} - \frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{64}{11} - \frac{32}{7} + \frac{4}{3}\right]\sqrt{2} - \left[\frac{2}{11} - \frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right] =$$
$$= \frac{596}{231}\left(\sqrt{2}\right) - \frac{64}{231} = \frac{4}{231}\left(149\sqrt{2} - 16\right).$$

□

2.4.7 Integrales $\int \csc^r x \cot^m x \,\mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

Procedemos como en el caso anterior (2.4.6).

- Cuando $m = 1$:
$$\int \csc^r x \cot^m x \; dx = \int \csc^r x \cot x \; dx,$$
Primero separamos un factor $\csc x$ para escribirlo junto a $\cot x \; dx$.
$$\int \csc^r x \; \cot x \; dx = \int (\csc x)^r \; \cot x \; dx = \int (\csc x)^{r-1} \; \csc x \; \cot x \; dx,$$
Si $y = \csc x$, entonces $dy = -\csc x \; \cot x \; dx$. Por lo tanto:
1. Para $r \neq 0$, $\displaystyle\int \csc^r x \; \cot x \; dx = -\int y^{r-1} \; dy = -\frac{y^r}{r} + C = -\frac{1}{r}\csc^r x + C.$
2. Para $r = 0$, $\displaystyle\int \csc^r x \; \cot x \; dx = \int \csc^0 x \cot x \, dx = \int \cot x \, dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$
- Cuando $m > 1$, expresamos el impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural.
En este caso:
$$\int \csc^r x \cot^m x \; dx = \int \csc^r x \cot^{2n+1} x \; dx,$$
la cual calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\csc x$ y un factor $\cot x$ para escribirlos junto a la diferencial dx.
$$\int \csc^r x \cot^{2n+1} x \; dx = \int \csc^{r-1} x \cot^{2n} x \; \csc x \; \cot x \; dx.$$
Luego consideramos que $\cot^{2n} x = (\cot^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.
$$\int \csc^r x \cot^{2n+1} x \; dx = \int \csc^{r-1} x \cot^{2n} x \; \csc x \; \cot x \; dx = \int (\csc x)^{r-1} \; (\cot^2 x)^n \; \csc x \; \cot x \; dx =$$
$$= \int (\csc x)^{r-1} \; (\csc^2 x - 1)^n \; \csc x \; \cot x \; dx.$$
Ahora aplicamos el mismo cambio de variable $y = \csc x \;\Rightarrow\; dy = -\csc x \; \cot x \; dx$:
$$\int (\csc x)^{r-1} (\csc^2 x - 1)^n \csc x \; \cot x \; dx = -\int y^{r-1} (y^2 - 1)^n \; dy.$$
Y como en los casos anteriores, podemos obtener el desarrollo de $(y^2 - 1)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^{r-1}. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Finalmente, se concluye considerando el cambio de variable realizado.

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.20 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\cot^3 2x \, dx}{\sqrt[3]{\csc 2x}}$.

▼ En este caso,
$$\int \frac{\cot^3 2x}{\sqrt[3]{\csc 2x}} \, dx = \int (\csc 2x)^{-\frac{1}{3}} \cot^3 2x \, dx.$$
Aplicamos el procedimiento mencionado: primero separando factores $(\csc 2x)$ y $(\cot 2x)$, para luego utilizar la identidad $\cot^2 2x = \csc^2 2x - 1$.
$$\int (\csc 2x)^{-\frac{1}{3}} \cot^3 2x \, dx = \int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} (\csc 2x)^1 \left(\cot^2 2x\right) (\cot 2x) \, dx =$$
$$= \int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} \left(\cot^2 2x\right) (\csc 2x \cdot \cot 2x) \, dx =$$
$$= \int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} \left(\csc^2 2x - 1\right) (\csc 2x \cdot \cot 2x) \, dx.$$

Si $y = \csc 2x$, entonces $\mathrm{d}y = -2\csc 2x \cdot \cot 2x\,\mathrm{d}x$. Además,

$$\int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} \left(\csc^2 2x - 1\right) (\csc 2x \cdot \cot 2x)\,\mathrm{d}x = \int y^{-\frac{4}{3}} \left(y^2 - 1\right) \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) = -\frac{1}{2} \int \left(y^{\frac{2}{3}} - y^{-\frac{4}{3}}\right) \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - (-3) y^{-\frac{1}{3}}\right] + C = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{y^{\frac{1}{3}}}\right] + C.$$

Pero $y = \csc 2x$. Por lo tanto,

$$\int \frac{\cot^3 2x}{\sqrt[3]{\csc 2x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{5}(\csc 2x)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{(\csc 2x)^{\frac{1}{3}}}\right] + C = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{5}\sqrt[3]{\csc^5 2x} + \frac{1}{\sqrt[3]{\csc 2x}}\right] + C.$$

□

2.4.8 Integrales $\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} px\,\mathrm{d}x$, $\int \operatorname{sen} mx \cdot \cos px\,\mathrm{d}x$, $\int \cos mx \cdot \cos px\,\mathrm{d}x$; $(m \neq p)$

Estas familias de integrales difieren de las anteriormente estudiadas, pues los argumentos (mx & px) de las funciones seno y coseno son diferentes ($mx \neq px$).

Para calcular estas familias de integrales, utilizaremos identidades trigonométricas que se obtienen, a su vez, de las identidades para $\operatorname{sen}(\alpha + \theta)$, $\operatorname{sen}(\alpha - \theta)$, $\cos(\alpha + \theta)$, $\cos(\alpha - \theta)$.

1. Como

$$\operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\alpha \quad \& \quad \operatorname{sen}(\alpha - \theta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\alpha,$$

entonces, al sumar estas identidades se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \theta) + \operatorname{sen}(\alpha - \theta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\theta,$$

de donde,

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha + \theta) + \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\right].$$

2. Como

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

al sumar estas identidades se obtiene:

$$\cos(\alpha - \theta) + \cos(\alpha + \theta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\theta,$$

de donde,

$$\cos\alpha \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \theta) + \cos(\alpha + \theta)\right].$$

3. Como

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

al restar la segunda identidad de la primera se obtiene:

$$\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha + \theta) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

de donde,

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha + \theta)\right].$$

Resumiendo, tenemos las identidades trigonométricas

1. $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\theta)+\operatorname{sen}(\alpha-\theta)\right];$

2. $\cos\alpha\cdot\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta)+\cos(\alpha+\theta)\right];$

3. $\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta)\right].$

También debemos tener presente las identidades

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

Ejemplo 2.4.21 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen}5x\cos 2x\,dx$.

▼ Aplicamos la primera identidad.

$$\int \operatorname{sen}5x\cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(5x+2x)+\operatorname{sen}(5x-2x)\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\operatorname{sen}7x+\operatorname{sen}3x\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}(-\cos 7x)+\frac{1}{3}(-\cos 3x)\right]+C =$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

□

Ejemplo 2.4.22 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen}2x\cos 5x\,dx$.

▼ Aplicamos la primera identidad.

$$\int \operatorname{sen}2x\cos 5x\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2x+5x)+\operatorname{sen}(2x-5x)\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\operatorname{sen}7x+\operatorname{sen}(-3x)\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left[\operatorname{sen}7x-\operatorname{sen}3x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}(-\cos 7x)-\frac{1}{3}(-\cos 3x)\right]+C =$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

□

Ejemplo 2.4.23 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen}8x\operatorname{sen}5x\,dx$.

▼ Aplicamos la tercera identidad.

$$\int \operatorname{sen}8x\operatorname{sen}5x\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(8x-5x)-\cos(8x+5x)\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos 3x-\cos 13x\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\operatorname{sen}3x)-\frac{1}{13}(\operatorname{sen}13x)\right]+C = \frac{1}{6}\operatorname{sen}3x-\frac{1}{26}\operatorname{sen}13x+C.$$

□

Ejemplo 2.4.24 *Calcular la integral* $\int \cos 5x\cos 7x\,dx$.

▼ Aplicamos la segunda identidad.

$$\int \cos 5x \cos 7x \, dx = \int \frac{1}{2} [\cos(5x - 7x) + \cos(5x + 7x)] \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(-2x) + \cos(12x)] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int [\cos 2x + \cos 12x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{12}(\operatorname{sen} 12x) \right] + C =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{24} \operatorname{sen} 12x + C.$$

□

Ejercicios 2.4.1 *Integración de potencias de funciones trigonométricas.* *Soluciones en la página 20*
Aplicar las técnicas de integración de potencias trigonométricas para calcular las siguientes integrales indefinidas.

1. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$.
2. $\int \cos^3 2y \, dy$.
3. $\int \tan^3 y \, dy$.
4. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \, dx$.
5. $\int \cos^5 2y \, dy$.
6. $\int \tan^5 y \, dy$.
7. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$.
8. $\int \operatorname{sen}^3 2y \, dy$.
9. $\int \cot^3 y \, dy$.
10. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.
11. $\int \operatorname{sen}^5 2y \, dy$.
12. $\int \cot^5 y \, dy$.
13. $\int \cos^2 3y \, dy$.
14. $\int \operatorname{sen}^2 2y \, dy$.
15. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$.
16. $\int \cos^4 y \, dy$.
17. $\int \operatorname{sen}^4 y \, dy$.
18. $\int \operatorname{sen}^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$.
19. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$.
20. $\int \tan^2 3x \, dx$.
21. $\int \sec^4 3x \, dx$.
22. $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$.
23. $\int \tan^4 3x \, dx$.
24. $\int \sec^6 2x \, dx$.
25. $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$.
26. $\int \cot^2 4x \, dx$.
27. $\int \csc^4 3x \, dx$.
28. $\int \tan^3 \theta \sec^3 \theta \, d\theta$.
29. $\int \tan^5 \theta \sec^5 \theta \, d\theta$.
30. $\int \cot^3 \theta \csc^5 \theta \, d\theta$.
31. $\int \operatorname{sen} 5x \cos 3x \, dx$.
32. $\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 2x \, dx$.
33. $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$.
34. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x \, dx$.
35. $\int \cos x \cos 4x \, dx$.
36. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$.

Ejercicios 2.4.1 *Integración de potencias de funciones trigonométricas.* *Preguntas: página 19*

1. $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C.$
2. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2y - \frac{1}{6}\text{sen}^3 2y + C.$
3. $\ln(\cos y) + \frac{1}{2}\sec^2 y + C.$
4. $\frac{1}{5}\text{sen}^5 x - \frac{2}{7}\text{sen}^7 x + \frac{1}{9}\text{sen}^9 x + C.$
5. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2y - \frac{1}{3}\text{sen}^3 2y + \frac{1}{10}\text{sen}^5 2y + C.$
6. $\frac{1}{4}\sec^4 y - \sec^2 y + \ln(\sec y) + C.$
7. $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$
8. $\frac{1}{6}\cos^3 2y - \frac{1}{2}\cos 2y + C.$
9. $-\frac{1}{2}\csc^2 y + \ln(\csc y) + C.$
10. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$
11. $-\frac{1}{2}\cos 2y + \frac{1}{3}\cos^3 2y - \frac{1}{10}\cos^5 2y + C.$
12. $-\frac{1}{4}\csc^4 y + \csc^2 y - \ln(\csc y) + C.$
13. $\frac{1}{2}y + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,6y + C.$
14. $\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}\,\text{sen}\,4y + C.$
15. $\frac{1}{128}\left[3x - \text{sen}\,4x + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,8x\right] + C.$
16. $\frac{3}{8}y + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2y + \frac{1}{32}\,\text{sen}\,4y + C.$
17. $\frac{3}{8}y - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2y + \frac{1}{32}\,\text{sen}\,4y + C.$
18. $\frac{1}{16}\left[\theta - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4\theta - \frac{1}{3}\text{sen}^3 2\theta\right] + C.$
19. $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$
20. $\frac{1}{3}\tan 3x - x + C.$
21. $\frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\tan^3 3x + C.$
22. $\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C.$
23. $\frac{1}{9}\tan^3 3x - \frac{1}{3}\tan 3x + x + C.$
24. $\frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{3}\tan^3 2x + \frac{1}{10}\tan^5 2x + C.$
25. $-\frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{15}\cot^5 x + C.$
26. $-\frac{1}{4}\cot 4x - x + C.$
27. $-\frac{1}{3}\cot 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C.$
28. $\frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{3}\sec^3\theta + C.$
29. $\frac{1}{9}\sec^9\theta - \frac{2}{7}\sec^7\theta + \frac{1}{5}\sec^5\theta + C.$
30. $\frac{1}{5}\csc^5\theta - \frac{1}{7}\csc^7\theta + C.$
31. $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}cos 2x + C.$
32. $\frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{12}\,\text{sen}\,6x + C.$
33. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{1}{10}\,\text{sen}\,5x + C.$
34. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x - \frac{1}{10}\,\text{sen}\,5x + C.$
35. $\frac{1}{6}\,\text{sen}\,3x + \frac{1}{10}\,\text{sen}\,5x + C.$
36. $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

2.5 Integración por sustitución trigonométrica

A continuación veremos una técnica de integración, la cual se basa en utilizar funciones trigonométricas para aplicar cambios de variable que tendrán como objetivo eliminar radicales de las formas $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ & $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde a es una constante positiva.

Consideremos aquí la notación siguiente: si f es una función con variable independiente x y además contiene al menos un radical como los siguientes:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$.
- $\sqrt{a^2 + x^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{a^2 + x^2})$.
- $\sqrt{x^2 - a^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.

2.5.1 Integrales $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$

Nuestro primer objetivo es eliminar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$. Si usamos el cambio de variable

$$x = a \operatorname{sen}\theta,$$

obtenemos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta.$$

El cambio de variable $x = a \operatorname{sen}\theta$ permite eliminar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$ convirtiéndolo en $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$.

Además, si $x = a\operatorname{sen}\theta$, entonces $\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable obtenemos:

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta) a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

que es una integral donde el integrando esta formado con las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}\theta$ & $\cos\theta$.

Al calcular esta última integral tendremos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta) a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = G(\theta) + C.$$

Debido a que en la integral original el integrando es una función de x, el resultado debe ser expresado mediante una función $H(x)$; esto es,

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta) a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = G(\theta) + C = H(x) + C.$$

Ahora bien, ¿cómo pasar de $G(\theta)$ a $H(x)$?
Como en $G(\theta)$ se tienen funciones trigonométricas, para pasar de $G(\theta)$ a $H(x)$ debemos considerar:

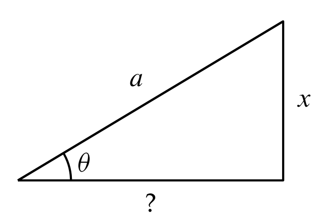
$$x = a \operatorname{sen}\theta \ \Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta \ \Rightarrow\ \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a};$$

además,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} \ \Rightarrow\ \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar, generado de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente a θ:

$$? = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

- Observación

  Es importante observar que para calcular integrales de la forma $\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$, también puede ser aplicado el cambio de variable:

  $$x = a\cos\theta.$$

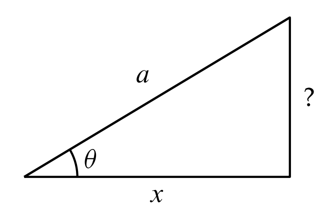
  En este caso:

  $$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \cos^2\theta)} = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta} = a \operatorname{sen}\theta.$$

  Además $\mathrm{d}x = -a \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$. El procedimiento es análogo al que se expuso para $x = a \operatorname{sen}\theta$.

  Aquí el triángulo rectángulo auxiliar, se genera de la forma siguiente:

  $$\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente a θ:

$$? \;=\sqrt{a^2-x^2}.$$

Ejemplo 2.5.1 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

▼ Debido a que $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2^2-x^2}$, se propone $x=2\operatorname{sen}\theta$.

Si $x=2\operatorname{sen}\theta$, entonces $dx=2\cos\theta\,d\theta$ y además

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2^2-2^2\operatorname{sen}^2\theta}=\sqrt{2^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=\sqrt{2^2\cos^2\theta}=2\cos\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int \frac{2^2\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos\theta}(2\cos\theta)\,d\theta=2^2\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=4\int\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=$$
$$=2\left[\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]+C=2\left[\theta-\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta)\right]+C=2[\theta-\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta]+C.$$

Ahora bien, para expresar este resultado como función de x debemos considerar que:

$$x=2\operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta=\frac{x}{2} \quad \& \quad \theta=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right); \quad \text{además,}$$
$$\sqrt{4-x^2}=2\cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

Esto es,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=2[\theta-\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta]+C=2\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right]+C=$$
$$=2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

□

Ejemplo 2.5.2 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

▼ Tomando en cuenta la observación hecha en la teoría expuesta, podemos optar por el cambio de variable

$$x=a\cos\theta=\cos\theta.$$

Entonces

$$dx=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \quad \text{y además} \quad \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}=\operatorname{sen}\theta.$$

Luego,

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int(\cos^3\theta)(\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = -\int \cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = -\int \operatorname{sen}^2\theta\cos^3\theta\,d\theta =$$
$$= -\int \operatorname{sen}^2\theta\left[\cos^2\theta\right]\cos\theta\,d\theta = -\int \operatorname{sen}^2\theta\left[1-\operatorname{sen}^2\theta\right]\cos\theta\,d\theta = -\int y^2\left(1-y^2\right)dy =$$

Donde $y = \operatorname{sen}\theta$ & $dy = \cos\theta\,d\theta$.

$$= \int y^2\left(y^2-1\right)dy = \int\left(y^4-y^2\right)dy = \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 + C =$$
$$= \frac{1}{5}(\operatorname{sen}\theta)^5 - \frac{1}{3}(\operatorname{sen}\theta)^3 + C = \frac{1}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + C =$$

Ya que $\sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen}\theta$.

$$= \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\left[\frac{(1-x^2)}{5} - \frac{1}{3}\right] + C = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{15}\left[3(1-x^2)-5\right] + C =$$
$$= \frac{1}{15}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\left(-2-3x^2\right) + C = -\frac{1}{15}\left(\sqrt{(1-x^2)^3}\right)\left(3x^2+2\right) + C.$$

□

2.5.2 Integrales $\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

Para lograr el objetivo de eliminar al radical $\sqrt{a^2+x^2}$, convenimos en utilizar el cambio de variable

$$x = a\tan\theta.$$

Entonces:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\sec\theta.$$

El cambio de variable $x = a\tan\theta$ permite eliminar al radical $\sqrt{a^2+x^2}$ convirtiéndolo en:

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta.$$

Además,

$$x = a\tan\theta \;\Rightarrow\; dx = a\sec^2\theta\,d\theta.$$

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable, obtenemos:

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \int f(a\tan\theta, a\sec\theta)a\sec^2\theta\,d\theta,$$

que es una integral en que el integrando esta formado con las funciones trigonométricas $\tan\theta$ y $\sec\theta$.

Al resolver esta integral tendremos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

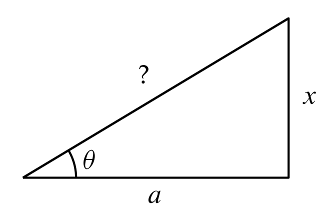
$$\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \int f(a\tan\theta, a\sec\theta)a\sec^2\theta\,d\theta = G(\theta) + C.$$

Para expresar este resultado en términos de la variable original x, debemos considerar:

$$x = a\tan\theta \;\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right); \text{además,}$$
$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta \;\Rightarrow\; \sec\theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}.$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar generado de la forma siguiente:

$$\tan\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa:

$$? = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

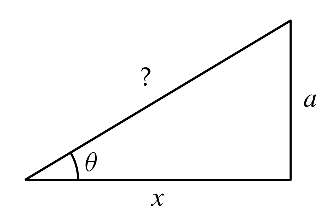
- Observación. Para calcular integrales de la forma $\int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) \mathrm{d}x$, también puede ser aplicado el cambio de variable $x = a\cot\theta$. En este caso:

  $$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\cot^2\theta} = \sqrt{a^2\left(1 + \cot^2\theta\right)} = \sqrt{a^2\csc^2\theta} = a\csc\theta.$$

  Además $\mathrm{d}x = -a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. El procedimiento es análogo al expuesto para $x = a\tan\theta$.

  En este caso el triángulo rectángulo auxiliar se genera de la forma siguiente:

  $$\cot\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{cateto opuesto a } \theta}.$$



  Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa:

  $$? = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Ejemplo 2.5.3 *Calcular la integral* $\int x^3\sqrt{x^2 + 9}\,\mathrm{d}x$.

▼ Debido a que $\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 3^2}$, se propone $x = 3\tan\theta$.

Si $x = 3\tan\theta$, entonces $\mathrm{d}x = 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ y además

$$\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{3^2\tan^2\theta + 3^2} = \sqrt{3^2\left(\tan^2\theta + 1\right)} = \sqrt{3^2\sec^2\theta} = 3\sec\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int 3^3\tan^3\theta\cdot 3\sec\theta\cdot 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 3^5\int \tan^3\theta\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= 3^5\int \tan^2\theta\cdot\sec^2\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\,\mathrm{d}\theta = 3^5\int\left(\sec^2\theta-1\right)\left(\sec^2\theta\right)\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta =$$

Haciendo $y=\sec\theta$ & $\mathrm{d}y=\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta$.

$$= 3^5\int\left(y^2-1\right)y^2\,\mathrm{d}y = 3^5\int\left(y^4-y^2\right)\mathrm{d}y =$$
$$= 3^5\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}y^3\right]+C = 3^5y^3\left[\frac{1}{5}y^2-\frac{1}{3}\right]+C =$$
$$= 3^5y^3\left[\frac{3y^2-5}{15}\right]+C = \frac{3^5}{15}y^3\left(3y^2-5\right)+C = \frac{3^4}{5}y^3\left(3y^2-5\right)+C =$$

Puesto que $y=\sec\theta$.

$$= \frac{3^4}{5}(\sec\theta)^3\left[3(\sec\theta)^2-5\right]+C =$$

Ya que $\sqrt{x^2+9}=3\sec\theta$.

$$= \frac{3^4}{5}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right)^3\left[3\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right)^2-5\right]+C =$$
$$= \frac{3^4}{5}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3}{3^3}\left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)-5\right]+C = \frac{3}{5}\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}\left[\frac{x^2+9-15}{3}\right] =$$
$$= \frac{3}{5}\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}\left(\frac{x^2-6}{3}\right)+C = \frac{1}{5}\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}+C.$$

□

Ejemplo 2.5.4 *Calcular la integral* $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

▼ Proponemos $x=a\tan\theta$, entonces $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ y además:

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2} = \sqrt{a^2\left(\tan^2\theta+1\right)} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\sec\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a\sec\theta} = \int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1 = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1 =$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right|+C_1 = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|-\ln|a|+C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

En particular: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$

□

2.5.3 Integrales $\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$

Como en los casos anteriores, nuestro primer objetivo es eliminar el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ para lo cual convenimos en utilizar el cambio de variable $x = a \sec \theta$. Entonces:

$$x = a \sec \theta \ \Rightarrow \ \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta.$$

Es decir, el cambio de variable $x = a \sec \theta$ permite eliminar el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ convirtiéndolo en:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta.$$

Además,

$$x = a \sec \theta \ \Rightarrow \ \mathrm{d}x = a \sec \theta \tan \theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable:

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \sec \theta, a \tan \theta) a \sec \theta \cdot \tan \theta \, \mathrm{d}\theta,$$

que es una integral en la que el integrando está conformado con las funciones trigonométricas $\sec \theta$ y $\tan \theta$. Como en los casos anteriores, al resolver esta integral obtenemos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

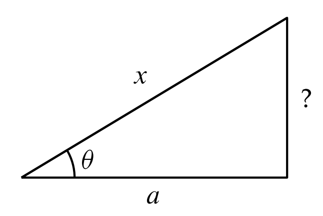
$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \sec \theta, a \tan \theta) a \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot \mathrm{d}\theta = G(\theta) + C.$$

Para expresar este resultado en términos de la variable original x, debemos considerar que:

$$x = a \sec \theta \ \Rightarrow \ \sec \theta = \frac{x}{a} \ \& \ \theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right); \quad \text{además}$$
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta \ \Rightarrow \ \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar generado de la manera siguiente:

$$\sec \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitagóras para determinar

$$? = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

- Observación

  Para calcular integrales de la forma $\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$, también puede ser aplicado el cambio de variable

$$x = a \csc \theta.$$

En este caso:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \csc^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2\left(\csc^2\theta - 1\right)} = \sqrt{a^2\cot^2\theta} = a\cot\theta.$$

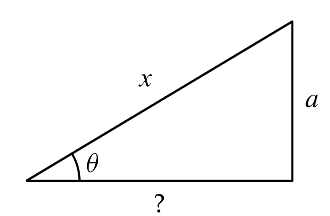
Además

$$\mathrm{d}x = -\csc\theta\cdot\cot\theta\cdot\mathrm{d}\theta.$$

El procedimiento es análogo al expuesto para $x = a\sec\theta$.

En este caso el triángulo rectángulo auxiliar se genera de la manera siguiente:

$$\csc\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a }\theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitagóras para determinar

$$? = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Ejemplo 2.5.5 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x.$

▼ Debido a que $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x^2-2^2}$, se propone

$$x = 2\sec\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 2\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$

y además

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{2^2\sec^2\theta - 2^2} = \sqrt{2^2\left(\sec^2\theta - 1\right)} = \sqrt{2^2\tan^2\theta} = 2\tan\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2^3\sec^3\theta}{2\tan\theta}(2\sec\theta\cdot\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2^3\int \sec^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 2^3\int \sec^2\theta\cdot\sec^2\theta\cdot\mathrm{d}\theta =$$
$$= 8\int\left(1+\tan^2\theta\right)\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\int\left(1+y^2\right)\mathrm{d}y =$$

Donde $y = \tan\theta$ & $\mathrm{d}y = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$= 8\left[y + \frac{1}{3}y^3\right] + C = 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C.$$

Pero como $\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta \;\Rightarrow\; \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}.$

Entonces:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C = 8\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right] + \frac{8}{3}\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right]^3 + C =$$
$$= 4\sqrt{x^2-4} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-4\right)^3} + C.$$

□

Ejemplo 2.5.6 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

▼ Si se propone:

$$x = a \sec\theta \Rightarrow dx = a \sec\theta \cdot \tan\theta \cdot d\theta$$

y además

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2\theta} = a \tan\theta.$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec\theta \cdot \tan\theta \cdot d\theta}{a \tan\theta} = \int \sec\theta \, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1.$$

Sin embargo:

$$x = a \sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1 = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C_1 =$$
$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln|a| + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

En particular:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C.$$

□

- Observación

  Los cambios de variable aplicados para eliminar a los radicales $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ & $\sqrt{x^2 - a^2}$, pueden ser utilizados también para calcular integrales en cuyos integrandos no se tengan explícitamente dichos radicales, sino solamente los binomios de los radicandos.

Ejemplo 2.5.7 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.

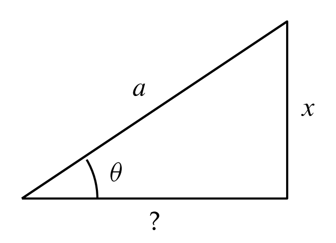
▼ Con el cambio de variable

$$x = a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = a \cos\theta \, d\theta,$$

obtenemos:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{a}{a^2} \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} d\theta =$$
$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{a} \int \sec\theta \, d\theta = \frac{1}{a} \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.$$

$$x = a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Usando el teorema de Pitagóras:

$$? = \sqrt{a^2 - x^2};$$

tenemos entonces:

$$\sec\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \& \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{(a + x)}{\sqrt{a - x}\sqrt{a + x}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$$

Esto es:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$$

□

Ejemplo 2.5.8 *Calcular la integral* $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

▼

$$x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta\, d\theta.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2\tan^2\theta + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{[a^2(\tan^2\theta + 1)]^2} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^4(\sec^2\theta)^2}\, d\theta =$$

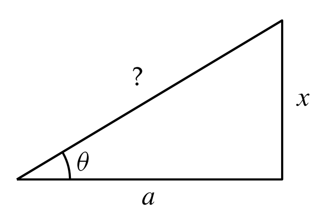
$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{a^3}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right] + C = \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3}[\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta] + C.$$

Ahora:

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Por el teorema de Pitagóras:

$$? = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Además, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ & $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Así también:

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\right] + C = \frac{1}{2a^3}\left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2a^3}\left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{x^2+a^2}\right] + C.$$

□

Ejemplo 2.5.9 *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4}$.

▼ Con el cambio de variable,

$$x = r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = r\cos\theta\,d\theta \;\&\; \sqrt{r^2-x^2} = r\cos\theta.$$

Obtenemos:

$$x = 0 \Rightarrow r\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \;\&\; x = r \Rightarrow r\operatorname{sen}\theta = r \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta) r\cos\theta\,d\theta = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta =$$
$$= \frac{r^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) - \left(0+\frac{1}{2}\operatorname{sen}0\right)\right] =$$
$$= \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-0\right] = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Esto es:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4}.$$

□

Ejercicios 2.5.1 *Sustitución trigonométrica.* *Soluciones en la página* 13
Aplicar la técnica de sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales indefinidas y derivar para verificar cada resultado.

1. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.
2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$.
3. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.
4. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$.
5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$.
6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\,dx$.
8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-4}}$.
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx$.
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^3}\,dx$.
12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.
13. $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

14. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

15. $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$

16. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$

17. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}}}.$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\left(9+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$

Ejercicios 2.5.1 *Sustitución trigonométrica.* *Preguntas: página 11*

1. $-\frac{1}{15}\left(3x^2+2\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C.$
2. $\frac{1}{15}\left(3x^2-2\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C.$
3. $\frac{1}{15}\left(3x^2+2\right)\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}+C.$
4. $-\frac{1}{3}\left(x^2+18\right)\sqrt{9-x^2}+C.$
5. $\frac{1}{3}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}+C.$
6. $\frac{1}{3}\left(x^2-18\right)\sqrt{9+x^2}+C.$
7. $-\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{12x^3}+C.$
8. $2\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$
9. $\frac{x^2+2}{8x^3}\sqrt{x^2-4}+C.$
10. $\frac{-1}{3a^2x^3}\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}+C.$
11. $\frac{1}{2a}\left[-\frac{a}{x^2}\sqrt{a^2+x^2}+\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right)\right]+C.$
12. $\frac{a^4}{8}\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{8}x\left(a^2-2x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+C.$
13. $2\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$
14. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)+C.$
15. $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)+C.$
16. $\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1-x^2}}+C.$
17. $-\frac{1}{8}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}+\text{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right]+C.$
18. $\ln\left(\sqrt{9+x^2}+x\right)-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+C.$

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

2.6 Integración de funciones racionales. Fracciones parciales

2.6.1 Introducción

En la sección anterior vimos que aplicando el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} \theta$ se obtiene:

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$$

De igual manera, aplicando la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen} \theta$ y el procedimiento del ejemplo **??** de la página **??** se obtendría:

$$\int \frac{2}{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C.$$

Ahora bien, si consideramos:

$$\frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x},$$

entonces podríamos afirmar que

$$\int \frac{2}{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x} = \ln|1 + x| - \ln|1 - x| + C = \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C,$$

que es el mismo resultado, pero obtenido de una manera menos laboriosa.

Pero, ¿cómo pasar de la fracción $\dfrac{2}{1 - x^2}$ a la suma de fracciones $\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x}$?

Uno de los objetivos en esta sección es mostrar cómo descomponer fracciones algebraicas en fracciones más simples, para luego utilizarlas en el cálculo de integrales de funciones racionales.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

2.6.2 Funciones racionales. Propias e impropias

Debemos tener presente algunos conceptos básicos sobre funciones.

- Una función polinomial es de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +, \ldots, +a_nx^n,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es un número entero no-negativo. Cuando $a_n \neq 0$, se dice que $p(x)$ es una función polinomial o polinomio de grado n.

Por ejemplo: las funciones constantes $p(x) = a_0$ son polinomiales de grado cero; las funciones lineales $p(x) = a_0 + a_1x$ son polinomios de grado 1 y las funciones cuadráticas $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ son polinomiales de grado 2.

- Una función racional es de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ & $q(x)$ son polinomios. Es decir, una función racional $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 +, \ldots, +a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 +, \ldots, +b_mx^m},$$

donde

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +, \ldots, +a_nx^n \text{ es un polinomio de grado } n$$

y donde

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 +, \ldots, +b_mx^m \text{ es un polinomio de grado } m.$$

En el contexto del álgebra elemental, una función racional es comúnmente denominada como una fracción algebraica.

Se supone siempre que en la función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ los polinomios $p(x), q(x)$ no tienen factores comunes, ya que en caso de existir, serían cancelados en la fracción.

- Una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es propia cuando el grado n del polinomio numerador $p(x)$ es menor que el grado m del polinomio denominador (es decir, cuando $n < m$) y es impropia cuando $n \geq m$.

Por ejemplo, las fracciones racionales

$$\frac{2}{3x-4}, \quad \frac{x-1}{x^2-2x+2}, \quad \frac{x^2}{x^3+1}, \quad \frac{x}{x^4-1}, \quad \frac{1}{x^5}$$

son propias y las fracciones

$$\frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{2x^3}{x^2-2x+1}, \quad \frac{x^4+1}{x^4-1}, \quad \frac{x^{10}}{x^5+1}$$

son ejemplos de fracciones racionales impropias.

Es importante tener presente que si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional impropia, entonces se puede efectuar la división del polinomio $p(x)$ entre el polinomio $q(x)$ y así obtener un cociente $c(x)$ y un residuo $r(x)$. El algoritmo de la división permite afirmar que

$$q(x)\overline{\big)\, p(x)}^{\,c(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$r(x),$$

donde $c(x)$ & $r(x)$ son polinomios y el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, por lo que $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ es una función racional propia.

Por ejemplo: la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}$ es una función racional impropia, ya que el grado 3 del polinomio numerador $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ es mayor que el grado 2 del polinomio denominador $q(x) = x^2 + 1$. Al efectuar la división $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se obtiene:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x - 3 \qquad\qquad \longleftrightarrow \quad \text{Cociente} \quad c(x) = 2x - 3. \\
x^2 + 1 & \overline{\big)\; 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5} \\
 & -2x^3 \qquad\quad -2x \\
 & \quad\overline{-3x^2 + x - 5} \\
 & \quad +3x^2 \qquad\quad +3 \\
 & \qquad\qquad\; \overline{x - 2} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Residuo} \quad r(x) = x - 2.
\end{array}
$$

El algoritmo de la división permite afirmar que

$$
\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} = (2x - 3) + \frac{x - 2}{x^2 + 1}.
$$

2.6.3 Integral de funciones racionales impropias

Por lo visto en la sección anterior, el algoritmo de la división permite expresar a toda función racional impropia $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como la suma de un polinomio $c(x)$ y una función racional propia $\dfrac{r(x)}{q(x)}$.

Este resultado es fundamental para calcular integrales de funciones racionales impropias, ya que:

$$
\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \;\Rightarrow\; \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right] \mathrm{d}x = \int c(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x.
$$

Esto es,

- La integral de una función racional impropia es igual a la integral de un polinomio $c(x)$, más la integral de una función racional propia $\dfrac{r(x)}{q(x)}$.

Ejemplo 2.6.1 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1}\,\mathrm{d}x$.

▼ En este caso, el integrando $f(x) = \dfrac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1}$ es una función racional impropia, ya que el grado 3 del polinomio numerador $p(x) = 6x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ es mayor que el grado 1 del polinomio denominador $q(x) = 2x - 1$. Luego, efectuamos la división

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^2 - 2x + 1 \qquad \longleftrightarrow \quad \text{Cociente} \quad c(x) = 3x^2 - 2x + 1. \\
2x - 1 & \overline{\big)\; 6x^3 - 7x^2 + 4x - 3} \\
 & -6x^3 + 3x^2 \\
 & \quad\overline{-4x^2 + 4x - 3} \\
 & \quad +4x^2 - 2x \\
 & \qquad\qquad \overline{2x - 3} \\
 & \qquad\quad\; -2x + 1 \\
 & \qquad\qquad\quad \overline{-2} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Residuo} \quad r(x) = -2.
\end{array}
$$

Y así tenemos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \Rightarrow \frac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1} = \left(3x^2 - 2x + 1\right) + \frac{-2}{2x - 1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1}\, dx = \int \left[\left(3x^2 - 2x + 1\right) + \frac{-2}{2x - 1}\right] dx = \int \left(3x^2 - 2x + 1\right) dx + \int \frac{-2\, dx}{2x - 1} =$$
$$= x^3 - x^2 + x - \ln|2x - 1| + C.$$

□

Ejemplo 2.6.2 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}\, dx.$

▼ Como anteriormente hemos visto,

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} = (2x - 3) + \frac{x - 2}{x^2 + 1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}\, dx = \int \left[(2x - 3) + \frac{x - 2}{x^2 + 1}\right] dx = \int (2x - 3)\, dx + \int \frac{x - 2}{x^2 + 1}\, dx =$$
$$= \int (2x - 3)\, dx + \int \frac{x\, dx}{x^2 + 1} - 2\int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$
$$= x^2 - 3x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) - 2\arctan x + C.$$

□

Ejemplo 2.6.3 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4}\, dx.$

▼ El integrando $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4}$ es una función racional impropia. Al efectuar la división

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 4 \\ x^2 + 4 & x^4 - 2x - 13 \\ & -x^4 - 4x^2 \\ \hline & -4x^2 - 2x - 13 \\ & +4x^2 \qquad + 16 \\ \hline & -2x \quad + 3, \end{array}$$

encontramos:

$$\frac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4} = \left(x^2 - 4\right) + \frac{-2x + 3}{x^2 + 4}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4}\, dx = \int \left[\left(x^2 - 4\right) + \frac{-2x + 3}{x^2 + 4}\right] dx = \int \left(x^2 - 4\right) dx + \int \frac{-2x + 3}{x^2 + 4}\, dx =$$
$$= \int \left(x^2 - 4\right) dx - \int \frac{2x\, dx}{x^2 + 4} + 3\int \frac{dx}{x^2 + 2^2} =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x - \ln\left(x^2 + 4\right) + 3\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 4x - \ln\left(x^2 + 4\right) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

□

Ejemplo 2.6.4 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^3 - x}\,dx$.

▼ El integrando es una función racional impropia. Al efectuar la división:

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 1 \\ \hline x^3 - x & 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3 \\ & -2x^4 \qquad + 2x^2 \\ \hline & +x^3 \qquad + x - 3 \\ & -x^3 \qquad + x \\ \hline & +2x - 3, \end{array}$$

tenemos:

$$\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^3 - x} = (2x + 1) + \frac{2x - 3}{x^3 - x}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^3 - x}\,dx = \int \left[(2x + 1) + \frac{2x - 3}{x^3 - x}\right] dx = \int (2x + 1)\,dx + \int \frac{2x - 3}{x^3 - x}\,dx =$$
$$= x^2 + x + \int \frac{2x - 3}{x^3 - x}\,dx.$$

Pero, ¿cómo calcular $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^3 - x}\,dx$? Es evidente que nos faltan herramientas.

□

2.6.4 Fracciones parciales

Una fracción parcial es una función racional de cualquiera de las formas siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{A}{(ax + b)^n}$; con A, a & b constantes, $a \neq 0$, n es un entero positivo.
2. $g(x) = \dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$, o bien $h(x) = \dfrac{B}{(ax^2 + bx + c)^n}$; donde A, B, a, b & c son constantes, n es un entero positivo y además $(ax^2 + bx + c)$ es un polinomio cuadrático irreducible

Es decir, una fracción parcial es una función racional (cociente de polinomios), esto es, puede ser:

1. Una constante A entre una potencia entera positiva de una función lineal $ax + b$

$$\frac{A}{(ax + b)^n}.$$

2. Una función lineal $Ax + B$ o bien una constante B entre una potencia entera positiva de un polinomio cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad \text{o bien} \quad \frac{B}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Aquí es importante tener presente la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- El polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es irreducible.
- El número $b^2 - 4ac$ es negativo $(b^2 - 4ac < 0)$.

- La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales y sus soluciones son números complejos.
- El polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ no es factorizable mediante factores lineales (con coeficientes) reales.

Ejemplo 2.6.5 *Las funciones racionales*

$$f_1(x) = \frac{1}{2x-3}; \quad f_2(x) = \frac{-4}{(2x-3)^5}; \quad f_3(x) = \frac{5}{x}; \quad f_4(x) = \frac{23}{x^4}$$

son fracciones parciales.

▼ Son de la forma 1., esto es, constante entre una potencia entera positiva de una lineal.

□

Ejemplo 2.6.6 *El polinomio cuadrático $x^2 - 2x + 5$ es irreducible.*

▼ Tenemos que

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0;$$

luego, el trinomio cuadrático $x^2 - 2x + 5$ no puede ser factorizado mediante factores lineales reales.

□

Ejemplo 2.6.7 *Las funciones racionales*

$$g_1(x) = \frac{3x-4}{x^2-2x+5}; \quad g_2(x) = \frac{x}{(x^2-2x+5)^3} \quad \& \quad g_3(x) = \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$$

son fracciones parciales.

▼ El trinomio cuadrático $(x^2 - 2x + 5)$ es irreducible.

□

Ejemplo 2.6.8 *Las funciones racionales*

$$h_1(x) = \frac{3x-4}{x^2-5x+6}; \quad h_2(x) = \frac{x}{(x^2-5x+6)^2} \quad \& \quad h_3(x) = \frac{1}{(x^2-5x+6)^3}$$

no son fracciones parciales

▼ El trinomio cuadrático $(x^2 - 5x + 6)$ no es irreducible. Observe que

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0,$$

y además que $(x^2 - 5x + 6) = (x-2)(x-3)$.

□

Ejemplo 2.6.9 *El binomio cuadrático $x^2 + k^2$, con k real y con $k \neq 0$, es irreducible.*

▼ Observe que la ecuación cuadrática $x^2 + k^2 = 0$ no tiene soluciones reales, ya que

$$x^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -k^2,$$

lo cual no puede suceder: un real no negativo x^2 no puede ser igual a un real negativo $(-k^2)$.

□

Ejemplo 2.6.10 *Las funciones racionales*

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^2+1}; \quad f_2(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2} \quad \& \quad f_3(x) = \frac{-2}{(x^2+9)^3},$$

son fracciones parciales.

▼ Los binomios cuadráticos $(x^2 + 1)$, $(x^2 + 4)$ y $(x^2 + 9)$ son irreducibles.

□

En vista de que uno de nuestros objetivos es integrar funciones racionales mediante la aplicación de fracciones parciales, es necesario que sepamos cómo integrar este tipo de funciones.

2.6.5 Integración de fracciones parciales

1. Cuando la fracción parcial es $f(x) = \dfrac{A}{(ax+b)^n}$,

   aplicamos el cambio de variable $y = ax + b \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = a$ & $dy = a\,dx$.

   Por lo tanto:

   - Para $n = 1$,

   $$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx = A\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{A}{a}\int \frac{dy}{y} = \frac{A}{a}\ln|y| + K = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + K.$$

   - Para $n > 1$,

   $$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{dy}{y^n} = \frac{A}{a}\int y^{-n}\,dy = \frac{A}{a}\left[\frac{y^{-n+1}}{-n+1}\right] + K = \frac{A}{a(-n+1)}\left[\frac{1}{y^{n-1}}\right] + K =$$
   $$= \frac{A}{a(1-n)}\left[\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}\right] + K.$$

2. La fracción parcial es $f(x) = \dfrac{D}{(ax^2+bx+c)^n}$, con ax^2+bx+c irreducible y D constante.

   Primero es necesario operar algebraicamente sobre el trinomio cuadrático irreducible (ax^2+bx+c) para expresarlo mediante una suma de cuadrados, esto es, $ax^2+bx+c = a(u^2+\lambda^2)$.

   Consideramos que

   $$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+px+q\right); \text{ donde } p = \frac{b}{a} \;\&\; q = \frac{c}{a}.$$

   Luego observamos que, por ser ax^2+bx+c un cuadrático irreducible, también x^2+px+q es irreducible; por lo que $p^2 - 4q < 0 \;\Rightarrow\; p^2 < 4q$.

   Ahora operamos algebraicamente sobre el trinomio x^2+px+q, pensando en construir el trinomio cuadrado perfecto asociado al binomio x^2+px.

   $$x^2+px+q = \left[x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left[x+\frac{p}{2}\right]^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} =$$
   $$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2;$$

   donde $\lambda = \dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ es un número real ya que:

   $$4q > p^2 \;\Rightarrow\; 4q - p^2 > 0 \quad \& \quad \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Entonces,

   $$ax^2+bx+c = a\left(x^2+px+q\right) = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2\right].$$

   Y si aquí consideramos que $x + \dfrac{p}{2} = u$, obtenemos:

   $$ax^2+bx+c = a\left(x^2+px+q\right) = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2\right] = a\left[u^2+\lambda^2\right].$$

Por lo cual,

$$(ax^2+bx+c)^n = \left[a\left(u^2+\lambda^2\right)\right]^n = a^n\left(u^2+\lambda^2\right)^n.$$

Posteriormente, al integrar debemos considerar la igualdad $x+\dfrac{p}{2}=u$ como un cambio de variable, por lo que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1$ & $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Por lo tanto:

- Para $n=1$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\left(x^2+px+q\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\lambda^2}=$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\lambda^2}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{\lambda}\arctan\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right]+K=$$
$$=\frac{1}{a}\left[\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}}\right]+K=$$
$$=\frac{2}{a\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+K,$$

  donde $p=\dfrac{b}{a}$ & $q=\dfrac{c}{a}$.

- Para $n>1$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{\mathrm{d}u}{a^n\left(u^2+\lambda^2\right)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^n}.$$

  Aquí podemos aplicar la sustitución trigonométrica:

$$u=\lambda\tan\theta,$$

  por lo que:

$$\mathrm{d}u=\lambda\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \& \quad u^2+\lambda^2=\lambda^2\tan^2\theta+\lambda^2=\lambda^2\left(\tan^2\theta+1\right)=\lambda^2\sec^2\theta.$$

  Por lo tanto:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{\lambda\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(\lambda^2\sec^2\theta\right)^n}=$$
$$=\frac{\lambda}{a^n}\int\frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\lambda^{2n}\sec^{2n}\theta}=\frac{\lambda}{a^n\lambda^{2n}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sec^{2n-2}\theta}=$$
$$=\frac{1}{a^n\lambda^{2n-1}}\int\cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a^n\lambda^{2n-1}}\int\cos^{2(n-1)}\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

  donde el exponente $2(n-1)$ es entero positivo par, ya que n es natural y $n>1$. Luego, esta integral podrá ser calculada aplicando técnicas tratadas en la sección 2.4.

Ahora bien, existe otra manera de calcular la integral $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^n}$ y es utilizando una fórmula recursiva.

Dicha fórmula, que será demostrada al final de esta sección, es la siguiente: para m entero positivo,

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^{m+1}}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^m}+\left(1-\frac{1}{2m}\right)\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^m}\right].$$

Con esto afirmamos que podemos calcular cualquier integral de la forma $\displaystyle\int\frac{D}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$, para D constante, n entero positivo y ax^2+bx+c irreducible.

3. Si la fracción parcial es $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, con A y B constantes y con ax^2+bx+c irreducible.

   Aquí primero aplicamos el cambio de variable $w = ax^2+bx+c \Rightarrow \mathrm{d}w = (2ax+b)\,\mathrm{d}x$.
   Expresamos la fracción parcial $f(x)$ como la suma de dos fracciones con el mismo denominador.
   Obtenemos así un par de integrales que podemos calcular.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A\left(x+\frac{B}{A}\right)}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{2a\left(x+\frac{B}{A}\right)}{2a\,(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\frac{2aB}{A}-b}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{\frac{2aB}{A}-b}{(ax^2+bx+c)^n}\right]\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{A}{2a}\int \frac{\frac{2aB}{A}-b}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \frac{A}{2a}\left(\frac{2aB}{A}-b\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}.
\end{aligned}$$

   Esto es,

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

   Por lo tanto:

   - Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \\
&= \frac{A}{2a}\ln|w| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \\
&= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)},
\end{aligned}$$

     donde la última integral ya ha sido calculada.

   - Para $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a}\int w^{-n}\,\mathrm{d}w + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a}\left(\frac{w^{-n+1}}{-n+1}\right) + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a(-n+1)}\left(\frac{1}{w^{n-1}}\right) + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a(1-n)\,(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n},
\end{aligned}$$

     donde la última integral ya ha sido calculada.

Ahora sí, con todo lo anterior, podemos afirmar que ya podemos calcular integrales de fracciones parciales.

Ejemplo 2.6.11 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \left[\frac{5}{3-2x} - \frac{4}{(3-2x)^5}\right] \mathrm{d}x$.

▼ Considerando el cambio de variable $y = 3-2x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2$ & $\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x$. Luego,

$$\int \left[\frac{5}{3-2x} - \frac{4}{(3-2x)^5}\right] \mathrm{d}x = 5\int \frac{\mathrm{d}x}{3-2x} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(3-2x)^5} = 5\int \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}y}{y^5} =$$
$$= -\frac{5}{2}\ln|y| + 2\int y^{-5}\,\mathrm{d}y = -\frac{5}{2}\ln|y| + 2\left(\frac{y^{-4}}{-4}\right) + C =$$
$$= -\frac{5}{2}\ln|y| - \frac{1}{2y^4} + C = -\frac{5}{2}\ln|3-2x| - \frac{1}{2(3-2x)^4} + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\ln|3-2x|^5 + \frac{1}{(3-2x)^4}\right] + C.$$

□

Ejemplo 2.6.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x+1}$.

▼ Primero verificamos que el trinomio cuadrático $3x^2-2x+1$ sea irreducible; como

$$3x^2-2x+1 = ax^2+bx+c \Rightarrow a = 3, b = -2 \,\&\, c = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2-4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4-12 = -8 < 0,$$

el trinomio cuadrático es irreducible.

A continuación expresamos el trinomio mediante una suma de cuadrados.

$$3x^2-2x+1 = 3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right] = 3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right] =$$
$$= 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right] = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right] = 3\left[u^2+\lambda^2\right],$$

donde $u = x - \dfrac{1}{3}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Considerando el cambio de variable $u = x - \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 1$ & $du = dx$, tenemos:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\lambda^2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\lambda}\arctan\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right] + K =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}}\right] + K = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

□

Ejemplo 2.6.13 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$.

▼ Verificamos que el trinomio cuadrático sea irreducible:

$$x^2-2x+5 = ax^2+bx+c \Rightarrow a=1, b=-2 \;\&\; c=5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2-4ac = (-2)^2-4(1)(5) = 4-20 = -16 < 0.$$

Además:

$$x^2-2x+5 = \left(x^2-2x+1\right)+4 = (x-1)^2+4 = (x-1)^2+2^2.$$

Aplicando el cambio de variable $u = x-1 \Rightarrow du = dx$, tenemos:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{dx}{[(x-1)^2+2^2]^2} = \int \frac{du}{(u^2+2^2)^2}.$$

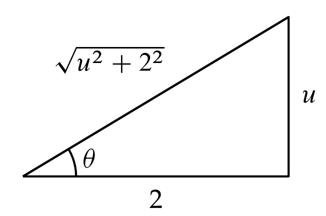
Con la sustitución trigonométrica :

$$u = 2\tan\theta \Rightarrow du = 2\sec^2\theta\, d\theta \quad \& \quad u^2+4 = 2^2\tan^2\theta+2^2 = 2^2\left(\tan^2\theta+1\right) = 2^2\sec^2\theta.$$

Entonces,

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{du}{(u^2+2^2)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta}{(2^2\sec^2\theta)^2}\, d\theta = \frac{2}{2^4}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{16}\left[\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]+K = \frac{1}{16}\left[\theta+\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta)\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\right]+K.$$

Como $u = 2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{u}{2}$.



Entonces:

$$\theta = \arctan\left(\frac{u}{2}\right);\ \operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+2^2}} \quad \& \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{du}{(u^2+4)^2} = \frac{1}{16}\left[\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\frac{2}{\sqrt{u^2+4}}\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{2u}{u^2+4}\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+4}\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}\right]+K.$$

□

Ejemplo 2.6.14 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ x^2-2x+5 es un trinomio cuadrático irreducible.

Aplicamos el cambio de variable $y = x^2-2x+5 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x-2$ & $\mathrm{d}y = (2x-2)\,\mathrm{d}x$.

Procedemos a construir esta diferencial en el numerador de la fracción que aparece en el integrando.

$$3x+4 = 3\left(x+\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}(2)\left(x+\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x+\frac{8}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x-2+\frac{8}{3}+2\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\left[(2x-2)+\frac{14}{3}\right] = \frac{3}{2}(2x-2)+7.$$

Luego expresamos la función racional como la suma de dos fracciones con igual denominador, para finalmente integrar mediante una suma de integrales.

$$\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+7}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{\frac{3}{2}(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{7}{(x^2-2x+5)^2}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} =$$
$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{y}\right] + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{-3}{2\,(x^2-2x+5)} + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Ahora utilizamos el resultado obtenido en el ejemplo anterior

$$\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-3}{2\,(x^2-2x+5)} + 7\left(\frac{1}{16}\right)\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{2(x-1)}{(x^2-2x+5)}\right] + K =$$
$$= \frac{-3}{2\,(x^2-2x+5)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{7(x-1)}{8\,(x^2-2x+5)} + K =$$
$$= \frac{(-3)(4)+7(x-1)}{8\,(x^2-2x+5)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + K =$$
$$= \frac{7x-19}{8\,(x^2-2x+5)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + K.$$

□

Ejemplo 2.6.15 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3}$.

▼ Podemos calcular esta integral de dos maneras diferentes: una es aplicando la sustitución trigonométrica $x = 3\tan\theta$, en cuyo caso debemos calcular la integral $\displaystyle\int \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$; y otra manera es utilizando la fórmula recursiva

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}\right].$$

Optamos por la aplicación de esta fórmula para $u = x, \lambda = 3$ & $m = 2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^{2+1}} = \frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{2(2)}\frac{x}{(x^2+3^2)^2} + \left(1-\frac{1}{2(2)}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\right)\frac{x}{(x^2+9)^2} + \left(1-\frac{1}{4}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}\right] = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\right)\frac{x}{(x^2+9)^2} + \left(\frac{3}{4}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}\right].$$

Esto es:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \frac{x}{36\,(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}. \qquad (*)$$

Aplicamos de nuevo la fórmula recursiva para $m = 1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^{1+1}} = \frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{2(1)}\frac{x}{(x^2+3^2)^1} + \left(1-\frac{1}{2(1)}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^1}\right] =$$
$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+9)} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)}\right] = \frac{1}{18}\left(\frac{x}{x^2+9}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3^2} =$$
$$= \frac{x}{18\,(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] + K.$$

Utilizamos este resultado y sustituimos en $(*)$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \frac{x}{36\,(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\left[\frac{x}{18\,(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] + K =$$
$$= \frac{x}{36\,(x^2+9)^2} + \frac{x}{(12)(18)\,(x^2+9)} + \frac{1}{(12)(54)}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + K.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{36}\left[\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{x}{6\,(x^2+9)^2} + \frac{1}{18}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] + K.$$

□

Ejemplo 2.6.16 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{6x+3}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x$.

▼ ¿Es irreducible el trinomio $x^2 - 4x + 5$?

$$x^2 - 4x + 5 = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow a = 1, b = -4 \;\&\; c = 5 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Sí, $x^2 - 4x + 5$ es un cuadrático irreducible. Consideramos el cambio de variable:

$$y = x^2 - 4x + 5 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x - 4 \quad \& \quad \mathrm{d}y = (2x-4)\,\mathrm{d}x.$$

Y procedemos a construir la diferencial $\mathrm{d}y$, para luego expresar la función racional del integrando como una suma de fracciones y así calcular la integral mediante una suma de integrales.

$$\int \frac{6x+3}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x+1}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x-4+1+4}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{(2x-4)+5}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 3\int \left[\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^3} + \frac{5}{(x^2-4x+5)^3}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= 3\int \frac{(2x-4)\,\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} + 15\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3}.$$

Calculamos ahora este par de integrales para luego realizar las sustituciones pertinentes.

$$\int \frac{(2x-4)\,\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \int y^{-3}\,\mathrm{d}y = \frac{y^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{2y^2} + C_1 = -\frac{1}{2\,(x^2-4x+5)^2} + C_1.$$

Para calcular la segunda integral:

$$x^2 - 4x + 5 = \left(x^2 - 4x\right) + 5 = \left(x^2 - 4x + 4\right) + 5 - 4 = (x-2)^2 + 1.$$

Nos damos cuenta de que

$$x^2 - 4x + 5 = u^2 + 1 \text{ con } u = x - 2.$$

Con el cambio de variable, $u = x - 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 5)^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x-2)^2 + 1]^3} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}.$$

Aquí aplicaremos la fórmula recursiva:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}\right],$$

considerando que $\lambda = 1$. Además, será aplicada dos veces: primero con $m = 2$ y luego con $m = 1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1^2)^{2+1}} = \frac{1}{2(2)}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2} = \\
&= \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^{1+1}} = \\
&= \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2(1)}\frac{u}{(u^2+1)^1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^1}\right] = \\
&= \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\right] = \\
&= \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan u + C_2.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x-2)^2+1]^3} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3} = \\
&= \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan u + C_2 = \\
&= \frac{(x-2)}{4(x^2-4x+5)^2} + \frac{3(x-2)}{8(x^2-4x+5)} + \frac{3}{8}\arctan(x-2) + C_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6x+3}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{(2x-4)\,\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} + 15\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} = \\
&= 3\left[\frac{-1}{2(x^2-4x+5)^2}\right] + 15\left[\frac{x-2}{4(x^2-4x+5)^2} + \frac{3(x-2)}{8(x^2-4x+5)} + \frac{3}{8}\arctan(x-2)\right] + C = \\
&= \frac{-3}{2(x^2-4x+5)^2} + \frac{15(x-2)}{4(x^2-4x+5)^2} + \frac{45(x-2)}{8(x^2-4x+5)} + \frac{45}{8}\arctan(x-2) + C = \\
&= \frac{15x-36}{4(x^2-4x+5)^2} + \frac{45(x-2)}{8(x^2-4x+5)} + \frac{45}{8}\arctan(x-2) + C.
\end{aligned}$$

□

2.6.6 Integración de funciones racionales propias por fracciones parciales

Ya hemos visto cómo proceder para integrar funciones racionales impropias y también cómo integrar fracciones parciales. Ahora veremos cómo proceder para integrar funciones racionales propias.

Es decir, nuestro objetivo ahora es calcular integrales de funciones racionales $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde el grado del polinomio numerador $p(x)$ sea menor que el grado del polinomio denominador $q(x)$.

Para esto es necesario escribir $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como una suma de fracciones parciales que, como sabemos, son fracciones con denominadores lineales o cuadráticos irreducibles, o bien son potencias naturales de estos.

Y para tener los denominadores de dichas fracciones parciales es necesario factorizar el polinomio denominador $q(x)$, para lo cual se considera que:

- Todo polinomio con coeficientes reales puede ser expresado, de manera única, como producto de factores lineales y/o cuadráticos irreducibles.

Sobra decir que, en esta etapa, debemos tener presentes los diversos procesos de factorización.

Una vez factorizado el denominador $q(x)$, se procede a obtener las fracciones parciales mediante un procedimiento algebraico que depende de los factores obtenidos para $q(x)$.

Mediante ejemplos, mostraremos procedimientos para casos específicos.

Caso 1. Los factores de $q(x)$ son todos lineales y diferentes.

En este caso:

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

en donde los factores $(a_ix + b_i)$ son todos diferentes.

Aquí se aplica el criterio siguiente:

Cada factor lineal $(a_ix + b_i)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A_i}{a_ix + b_i}$ con A_i constante.

En este caso debemos proponer:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

con $A_1, A_2, \cdots, A_n$ constantes.

Para determinar los valores de las constantes A_i, se procede a obtener la suma de estas fracciones parciales, la cual tendrá como mínimo común denominador $q(x)$. La igualdad de la función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y la suma de las fracciones nos llevarán a una igualdad de polinomios (los numeradores), que permitirá el cálculo de las constantes A_i mediante la solución de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2.6.17 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 5x - 18}{x^3 + x^2 + 6x}\,dx$.

▼ Primero observamos que el integrando es una función racional propia.

Luego factorizamos el polinomio denominador $q(x)$.

$$q(x) = x^3 + x^2 - 6x = x\left(x^2 + x - 6\right) = x(x - 2)(x + 3).$$

Aquí hay tres factores lineales diferentes: x, $(x - 2)$ & $(x + 3)$.
Para expresar (descomponer) la función racional como una suma de fracciones parciales aplicamos el siguiente criterio:

- Cada factor lineal $(ax + b)$ de $q(x)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{ax + b}$ con A constante.

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}=\frac{2x^2-5x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}.$$

Sumamos las fracciones parciales propuestas y obtenemos:

$$\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

Se tiene entonces la igualdad

$$\frac{2x^2-5x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

En esta igualdad de fracciones vemos que los denominadores coinciden. Por esto inferimos que los numeradores deben ser iguales y debe cumplirse:

$$\begin{aligned}2x^2-5x-18 &= A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)=\\ &= A(x^2+x-6)+B(x^2+3x)+C(x^2-2x)=\\ &= Ax^2+Ax-6a+Bx^2+3Bx+Cx^2-2Cx=\\ &= (A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x+(-6A).\end{aligned}$$

Esta igualdad de polinomios ocurre cuando, y solamente cuando, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales. Esto es, cuando:

$$\begin{aligned}A+B+C &= 2;\\ A+3B-2C &= -5;\\ -6A &= -18.\end{aligned}$$

Obtenemos la solución de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, de la siguiente manera:

De $-6A=-18$ se obtiene $A=3$. Luego,

$$\begin{aligned}A+B+C &= 2 & \& \ A=3 \Rightarrow\ 3+B+C &= 2 & \Rightarrow\ B+C &= -1.\\ A+3B-2C &= -5 & \& \ A=3 \Rightarrow\ 3+3B-2C &= -5 & \Rightarrow\ 3B-2C &= -8.\end{aligned}$$

Multiplicamos por 2 la primera ecuación y el resultado se suma con la segunda.

$$\begin{aligned}2B+2C &= -2;\\ 3B-2C &= -8;\\ \hline 5B &= -10;\\ B &= -2.\end{aligned}$$

Luego,

$$B+C=-1 \ \& \ B=-2 \ \Rightarrow\ -2+C=-1 \ \Rightarrow\ C=1.$$

Los valores de constantes son $A=3$, $B=-2$, $C=1$. Por lo tanto:

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=\frac{3}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Finalmente, integramos y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}\,dx &= \int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)dx=3\ln x-2\ln(x-2)+\ln(x+3)+K_1=\\ &= \ln x^3-\ln(x-2)^2+\ln(x+3)+\ln K=\ln\left[\frac{Kx^3(x+3)}{(x-2)^2}\right].\end{aligned}$$

□

Observación. En este caso, en que el denominador $q(x)$ tiene factores lineales diferentes, disponemos de otra manera para determinar los valores de las constantes que son numeradores de las fracciones parciales propuestas.

Primero se realiza el procedimiento visto, desde el inicio hasta que se obtiene la igualdad de los polinomios numeradores; a continuación se identifican las raíces del denominador $q(x)$, para luego usarlas (una por una) en la igualdad de los polinomios numeradores. De cada sustitución efectuada se obtiene el valor de una de las constantes. Para entender esto, usaremos la misma integral del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.6.18 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2+6x}\,\mathrm{d}x$.

▼

Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x$ procedimos así:

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}=\frac{2x^2-5x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, nos llevó a la igualdad de los polinomios numeradores

$$2x^2-5x-18=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2). \tag{2.1}$$

Ahora bien, las raíces del polinomio denominador $q(x)=x(x-2)(x+3)$ son: $x=0$, $x=2$, $x=-3$.

- Utilizando $x=0$ en la igualdad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned}2(0)^2-5(0)-18&=A(0-2)(0+3)+B(0)(0+3)+C(0)(0-2)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;-18&=A(-2)(3)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;-18&=A(-6)\;\Rightarrow\;A=3.\end{aligned}$$

- Utilizando $x=2$ en la igualdad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned}2(2)^2-5(2)-18&=A(2-2)(2+3)+B(2)(2+3)+C(2)(2-2)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;-20&=A(0)+B(2)(5)+C(0)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;-20&=B(10)\;\Rightarrow\;B=-2.\end{aligned}$$

- Utilizando $x=-3$ en la igualdad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned}2(-3)^2-5(-3)-18&=A(-3-2)(-3+3)+B(-3)(-3+3)+C(-3)(-3-2)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;15&=A(-5)(0)+B(-3)(0)+C(-3)(-5)\;\Rightarrow\\ \Rightarrow\;15&=C(15)\;\Rightarrow\;C=1.\end{aligned}$$

Entonces, como ya sabíamos, $A=3$, $B=-2$, $C=1$.

Luego, completando el ejemplo,

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}=\frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=3\ln x-2\ln(x-2)+\ln(x+3)+K=\\ &=\ln\left[\frac{Kx^3(x+3)}{(x-2)^2}\right].\end{aligned}$$

□

Caso 2. Cuando en $q(x)$ se tiene un factor lineal repetido.

Aquí consideramos que $q(x)$ tiene al menos un factor $(\alpha x + \beta)^m$, lo que es indicativo de que el factor lineal $(\alpha x + \beta)$ se repite m–veces.

En este caso:

- Cada factor $(\alpha x + \beta)^m$, que es un factor lineal con exponente m, genera las m fracciones parciales siguientes:
$$\frac{B_1}{\alpha x + \beta} + \frac{B_2}{(\alpha x + \beta)^2} + \frac{B_3}{(\alpha x + \beta)^3} + \cdots + \frac{B_m}{(\alpha x + \beta)^m},$$
donde $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_m$ son constantes.

Por ejemplo:
$$q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)\cdots(a_k x + b_k)(\alpha x + \beta)^m,$$
con los factores lineales $(a_i x + b_i)$ todos diferentes, para descomponer a $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ en fracciones parciales se debe considerar:

1. Cada factor $(a_i x + b_i)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A_i}{a_i x + b_i}$, con A_i constante.
2. El factor $(\alpha x + \beta)^m$ genera las m fracciones parciales ya mencionadas.

Por lo tanto, la descomposición sería:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_k x + b_k} + \left[\frac{B_1}{\alpha x + \beta} + \frac{B_2}{(\alpha x + \beta)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(\alpha x + \beta)^m}\right].$$

Para determinar los valores de las constantes A_i, B_i, se procede algebraicamente como en el caso anterior.

Ejemplo 2.6.19 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{10x - 16}{(x^2 - 4)(x^2 - 2x + 1)}\,dx$.

▼ El integrando es una función racional propia. Factorizamos el polinomio denominador $q(x)$.
$$q(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 2x + 1\right) = (x + 2)(x - 2)(x - 1)^2.$$

Vemos aquí dos factores lineales diferentes, $(x + 2)$ y $(x - 2)$, así como un factor lineal repetido, $(x - 1)^2$.

1. El factor $(x + 2)$ genera una fracción parcial $\dfrac{A}{x + 2}$.
2. El factor $(x - 2)$ genera una fracción parcial $\dfrac{B}{x - 2}$.
3. El factor $(x - 1)^2$ genera dos fraciones parciales $\dfrac{C}{x - 1}$, $\dfrac{D}{(x - 1)^2}$.

Por lo tanto:
$$\frac{10x - 16}{(x^2 - 4)(x^2 - 2x + 1)} = \frac{10x - 16}{(x + 2)(x - 2)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} =$$
$$= \frac{A(x - 2)(x - 1)^2 + B(x + 2)(x - 1)^2 + C(x + 2)(x - 2)(x - 1) + D(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)(x - 1)^2}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, se cumple cuando los numeradores son iguales.

$$\begin{aligned}10x-16 &= A(x-2)(x-1)^2+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+D(x+2)(x-2) = \\ &= A\left(x^3-4x^2+5x-2\right)+B\left(x^3-3x+2\right)+C\left(x^3-x^2-4x+4\right)+D(x^2-4) = \\ &= (A+B+C)x^3+(-4A-C+D)x^2+(5A-3B-4C)x+(-2A+2B+4C-4D).\end{aligned}$$

Esta última igualdad de polinomios se cumple cuando se satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A-C+D=0 \\ 5A-3B-4C=10 \\ -2A+2B+4C-4D=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0; & \text{(Ec. 1)} \\ -4A-C+D=0; & \text{(Ec. 2)} \\ 5A-3B-4C=10; & \text{(Ec. 3)} \\ -A+B+2C-2D=-8. & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema así:

$$\begin{aligned} 4(\text{Ec. }1)+(\text{Ec. }3) &\Rightarrow 9A+B=10; \\ 2(\text{Ec. }2)+(\text{Ec. }4) &\Rightarrow \underline{-9A+B}=-8\,. \quad \boxed{\text{Sumando estas dos ecuaciones}} \end{aligned}$$

$$2B=2 \Rightarrow B=1.$$

$$\begin{aligned} 9A+B=10\ \&\ B=1 &\Rightarrow 9A+1=10 &&\Rightarrow A=1; \\ A+B+C=0, A=1\ \&\ B=1 &\Rightarrow 1+1+C=0 &&\Rightarrow C=-2; \\ -4A-C+D=0, A=1\ \&\ C=-2 &\Rightarrow -4+2+D=0 &&\Rightarrow D=2. \end{aligned}$$

Luego entonces,

$$\frac{10x-16}{(x^2-4)(x^2-2x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int\frac{10x-16}{(x^2-4)(x^2-2x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left[\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x = \\ &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+2\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln(x+2)+\ln(x-2)-2\ln(x-1)+2\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]+K = \\ &= \ln(x+2)+\ln(x-2)-\ln(x-1)^2-\frac{2}{(x-1)}+K = \\ &= \ln\left[\frac{x^2-4}{(x-1)^2}\right]-\frac{2}{(x-1)}+K.\end{aligned}$$

□

Observación. Con respecto a la otra manera para determinar los valores de las constantes (comentada en el caso anterior), que son los numeradores de las fracciones parciales propuestas, el procedimiento en este ejemplo es el siguiente.

Tomando en cuenta la igualdad de los numeradores

$$10x-16=A(x-2)(x-1)^2+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+D(x+2)(x-2), \tag{2.2}$$

y las raíces del denominador $q(x)=(x+2)(x-2)(x-1)^2$, que son $x=-2$, $x=2$ & $x=1$ (de multiplicidad 2), usamos cada raíz en la igualdad (2.2) , para determinar los valores A, B, C, D.

$$
\begin{array}{lll}
x=-2 \text{ en } (2.2) \Rightarrow 10(-2)-16=A(-4)(-3)^2+B(0)+C(0)+D(0) & \Rightarrow -36=A(-36) & \Rightarrow A=1.\\
x=2 \text{ en } (2.2) \Rightarrow 10(2)-16=A(0)+B(4)(1)^2+C(0)+D(0) & \Rightarrow 4=B(4) & \Rightarrow B=1.\\
x=1 \text{ en } (2.2) \Rightarrow 10(1)-16=A(0)+B(0)+C(0)+D(3)(-1) & \Rightarrow -6=D(-3) & \Rightarrow D=2.
\end{array}
$$

Ya utilizamos todas las raíces y todavía falta por determinar el valor de la constante C.

¿Qué hacer? Ante esta situación, utilizamos los valores $A=1$, $B=1$, $D=2$ en la igualdad (2.2) y obtenemos:

$$10x-16=1(x-2)(x-1)^2+1(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+2(x+2)(x-2).$$

Ahora desarrollamos, simplificamos y despejamos C.

$$
\begin{aligned}
&10x-16=\left(x^3-4x^2+5x-2\right)+\left(x^3-3x+2\right)+C(x+2)(x-2)(x-1)+2\left(x^2-4\right) \Rightarrow\\
&\Rightarrow 10x-16=2x^3-2x^2+2x-8+C(x+2)(x-2)(x-1) \Rightarrow\\
&\Rightarrow -2x^3+2x^2+8x-8=C(x+2)(x-2)(x-1) \Rightarrow\\
&\Rightarrow C=\frac{-2x^3+2x^2+8x-8}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{-2\left(x^3-x^2-4x+4\right)}{(x^3-x^2-4x+4)}=-2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como ya sabíamos, los valores de las constantes son $A=1$, $B=1$, $C=-2$, $D=2$.

Caso 3. Cuando en $q(x)$ hay factores cuadráticos irreducibles (ax^2+bx+c) o bien $\left(ax^2+bx+c\right)^m$ [el exponente m indica que el cuadrático irreducible $\left(ax^2+bx+c\right)$ se repite m–veces].

El criterio que se aplica en este caso es el siguiente:

1. Cada factor cuadrático irreducible diferente $\left(ax^2+bx+c\right)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, con A y B constantes.
2. Cada factor cuadrático irreducible repetido $\left(ax^2+bx+c\right)^m$ genera las m fracciones parciales siguientes
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m},$$
con A_i y B_i constantes, para $i=1,2,\ldots,m$.

Para determinar los valores de las constantes A_i, B_i se lleva a cabo el mismo procedimiento algebraico aplicado en los casos anteriores.

Ejemplo 2.6.20 *Calcular la integral* $\displaystyle\int\frac{x^2-4x-1}{x^4-1}\,dx$.

▼ Notamos primero que el integrando es una función racional propia.

Luego factorizamos el denominador $q(x)$:

$$q(x)=x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Para expresar mediante fracciones parciales al integrando debemos considerar que:

1. El factor lineal $(x-1)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{x-1}$.
2. El factor lineal $(x+1)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{B}{x+1}$.
3. El factor cuadrático irreducible $\left(x^2+1\right)$ genera una fracción parcial de forma $\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

Entonces,

$$\frac{x^2-4x-1}{x^4-1} = \frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} =$$
$$= \frac{A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}.$$

Esta igualdad de fracciones, con igual denominador, se cumple cuando los polinomios numeradores son iguales

$$x^2-4x-1 = A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x-1)(x+1) =$$
$$= A\left(x^3+x^2+x+1\right)+B\left(x^3-x^2+x-1\right)+C\left(x^3-x\right)+D\left(x^2-1\right) =$$
$$= (A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D).$$

Esta igualdad de polinomios se cumple cuando los términos del mismo grado tienen coeficientes iguales. Es decir, se debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C = 0; & \text{(Ec. 1)} \\ A-B+D = 1; & \text{(Ec. 2)} \\ A+B-C = -4; & \text{(Ec. 3)} \\ A-B-D = -1. & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de la siguiente manera.

Sumando (Ec. 1) con (Ec. 3), se obtiene $2A+2B=-4$.

Sumando (Ec. 2) con (Ec. 4), se obtiene $2A-2B=0$.

Y sumando este último par de ecuaciones se obtiene $4A=-4$; de donde $A=-1$. Luego,

$$\begin{array}{rcll} 2A-2B=0 & \& & A=-1 \Rightarrow B=A=-1 & \Rightarrow B=-1; \\ A+B+C=0 & \& & A=B=-1 \Rightarrow -1-1+C=0 & \Rightarrow C=2; \\ A-B+D=1 & \& & A=B=-1 \Rightarrow 0+D=1 & \Rightarrow D=1. \end{array}$$

Entonces:

$$\frac{x^2-4x-1}{x^4-1} = \frac{-1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^2-4x-1}{x^4-1}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= -\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K =$$
$$= -[\ln(x-1)+\ln(x+1)]+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K =$$
$$= -\ln[(x-1)(x+1)]+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K =$$
$$= -\ln\left(x^2-1\right)+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K =$$
$$= \ln\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]+\arctan x+K.$$

□

Ejemplo 2.6.21 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx.$

▼ Primero observamos que el integrando es una función racional propia.

Luego factorizamos el denominador $q(x)$.

$$q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = \left(x^2\right)^2 + 2\left(x^2\right) + 1^2 = \left(x^2+1\right)^2.$$

Aquí se tiene un factor cuadrático irreducible $\left(x^2+1\right)$ repetido dos veces, por lo cual genera dos fracciones parciales con numeradores lineales. Esto es,

$$\frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, se cumple cuando los numeradores son iguales.

$$x^2-2x+1 = (Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D) = A\left(x^3+x\right) + B\left(x^2+1\right) + C(x) + D =$$
$$= (A)x^3 + (B)x^2 + (A+C)x + (B+D).$$

Igualdad de polinomios que se cumple cuando:

$$A = 0;\ B = 1;\ A + C = -2;\ B + D = 1 \ \Rightarrow\ A = 0;\ B = 1;\ C = -2;\ D = 0.$$

Entonces,

$$\frac{x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right] dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \left(x^2+1\right)^{-2} 2x\,dx =$$
$$= \arctan x - \frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1} + K = \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + K.$$

□

En el siguiente ejemplo haremos uso del teorema del Factor, el cual asegura que:

- Si $x = r$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $(x-r)$ es un factor de $P(x)$. Es decir, si $P(r) = 0$, entonces $(x-r)$ es un factor de $P(x)$.

  Además, si $(x-r)$ es un factor de $P(x)$, entonces $P(x) = (x-r)R(x)$; donde $R(x)$ es otro factor polinomial que se obtiene efectuando la división $\dfrac{P(x)}{x-r}$.

Ejemplo 2.6.22 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx$.

▼ Es evidente que el integrando es una función racional propia.

Aquí, al denominador $q(x) = x^3-3x^2+7x-5$ no se le identifica fácilmente con una expresión factorizable.

Pensando en el teorema del Factor nos preguntamos ¿qué valor de x produce $q(x) = 0$?

Si $x = 1$:

$$q(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 7(1) - 5 = 1 - 3 + 7 - 5 = 8 - 8 = 0.$$

Luego, $x = 1$ es una raíz de $q(x)$. Entonces, por el teorema del Factor se afirma que $(x-1)$ es un factor del polinomio $q(x)$. Esto es, $q(x) = (x-r)R(x)$, donde

$$R(x) = \frac{q(x)}{x-r} = \frac{x^3-3x^2+7x-5}{x-1} = x^2-2x+5.$$

Es decir, $q(x) = (x-1)\left(x^2-2x+5\right)$.

El polinomio $\left(x^2-2x+5\right)$ es un factor irreducible, ya que:

$$b^2-4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4-20 = -16 < 0.$$

Ahora bien, para descomponer el integrando mediante fracciones parciales debemos considerar que:

1. El factor lineal $(x-1)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{x-1}$.
2. El factor cuadrático irreducible $\left(x^2-2x+5\right)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+5}$.

Luego,

$$\frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{3x^2-8x+13}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} = \frac{A\left(x^2-2x+5\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Desarrollando el último numerador:

$$\begin{aligned} A\left(x^2-2x+5\right)+(Bx+C)(x-1) &= A\left(x^2-2x+5\right)+B\left(x^2-x\right)+C(x-1) = \\ &= (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C). \end{aligned}$$

Igualamos con el numerador original:

$$(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C) = 3x^2-8x+13.$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{aligned} A+B=3; -2A-B+C=-8 \quad &\& \quad 5A-C=13 \Rightarrow \\ \Rightarrow B=3-A; -2A-B+C=-8 \quad &\& \quad C=5A-13. \end{aligned}$$

Usando $B = 3-A$ & $C = 5A-13$ en $-2A-B+C = -8$, se obtiene $4A = 8$, de donde $A = 2$. Luego, $B = 3-A = 3-2 = 1$ & $C = 5A-13 = 5(2)-13 = -3$.

Entonces:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2-2x+5}.$$

Por lo que

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{x-3}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Observe que $y = x^2-2x+5 \Rightarrow dy = (2x-2)\,dx$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2(x-3)}{x^2-2x+5}\,dx = \\ &= 2\ln(x-1) + \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)-4}{x^2-2x+5}\,dx = \\ &= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\int \left[\frac{2x-2}{x^2-2x+5} - \frac{4}{x^2-2x+5}\right]dx = \\ &= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x+5}\,dx - \frac{4}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \\ &= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+4} = \end{aligned}$$

$$= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\ln y - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 2^2} =$$
$$= \ln(x-1)^2 + \ln y^{\frac{1}{2}} - 2\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right] + K =$$
$$= \ln(x-1)^2 + \ln\sqrt{x^2-2x+5} - \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + K.$$

□

Ejemplo 2.6.23 *Calcular la integral* $\int \frac{-2x^2+8x+2}{x^4-2x^2+1}\, dx$.

▼ El integrando es una función racional propia. Factorizamos el polinomio denominador $q(x)$.

$$q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2\right)^2 - 2\left(x^2\right) + 1 = \left(x^2-1\right)^2 = [(x-1)(x+1)]^2 \Rightarrow q(x) = (x-1)^2(x+1)^2.$$

Expresamos el integrando mediante fracciones parciales

$$\frac{-2x^2+8x+2}{x^4-2x^2+1} = \frac{-2x^2+8x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, se cumple cuando los numeradores son iguales

$$-2x^2+8x+2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2 =$$
$$= A\left(x^3+x^2-x-1\right) + B\left(x^2+2x+1\right) + C\left(x^3-x^2-x+1\right) + D\left(x^2-2x+1\right) =$$
$$= (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (-A+2B-C-2D)x + (-A+B+C+D).$$

Igualdad de polinomios que se cumple cuando

$$\begin{cases} A + C = 0; & \text{(Ec. 1)} \\ A + B - C + D = -2; & \text{(Ec. 2)} \\ -A + 2B - C - 2D = 8; & \text{(Ec. 3)} \\ -A + B + C + D = 2. & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones de la forma siguiente:

Sumando (Ec. 1) con (Ec. 3), se obtiene: $2B - 2D = 8$.

Sumando (Ec. 2) con (Ec. 4), se obtiene: $2B + 2D = 0$.

Sumando este par de ecuaciones se obtiene $4B = 8$, de donde $B = 2$.

Luego se obtienen los valores $D = -2$, $A = -1$, $C = 1$.

Entonces:

$$\frac{-2x^2+8x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{-2x^2+8x+2}{x^4-2x^2+1}\, dx = \int \left[-\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx =$$
$$= -\int \frac{dx}{x-1} + 2\int (x-1)^{-2}\, dx + \int \frac{dx}{x+1} - 2\int (x+1)^{-2}\, dx =$$
$$= -\ln(x-1) + 2\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right] + \ln(x+1) - 2\left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right] + K =$$
$$= -\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + K =$$
$$= \ln\left[\frac{x+1}{x-1}\right] + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} + K = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{4}{x^2-1} + K.$$

□

Ejercicios 2.6.1 *Fracciones Parciales.* *Soluciones en la página 27*
Aplicar el método de Fracciones Parciales para calcular las siguientes integrales indefinidas y derivar para verificar cada resultado.

1. $\displaystyle\int \frac{x-12}{x^2+x-6}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{9x-40}{x^2-9x+20}\,dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^2-4}.$
4. $\displaystyle\int \frac{(x-3)^2\,dx}{(x-1)(x^2-1)}.$
5. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-1}{x^3+x}\,dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{6x^2-24x-54}{(x^2-9)^2}\,dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+8}{(x^2+4)^2}\,dx.$
8. $\displaystyle\int \frac{10\,dx}{4x^2-9}.$
9. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+4x-4}{x^4-2x^3+2x^2}\,dx.$
10. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx.$
11. $\displaystyle\int \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 dx.$
12. $\displaystyle\int \frac{5x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}\,dx.$
13. $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^3+4x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx.$
14. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}\,dx.$
15. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx.$
16. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx.$
17. $\displaystyle\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx.$
18. $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+36}{x^4-16}\,dx.$

2.6.7 Apéndice

Deducción de la fórmula recursiva para $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}}$.

▼

$$\int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} = \int \frac{(u^2+\lambda^2)}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}}\,du = \int \frac{u^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} + \int \frac{\lambda^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{\lambda^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - \int \frac{u^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - \int u\cdot\left(u^2+\lambda^2\right)^{-m-1} u\,du.$$

Aplicamos integración por partes para calcular la última integral; seleccionando

$$w = u \;\&\; dv = \left(u^2+\lambda^2\right)^{-m-1} u\,du,$$

se obtienen

$$dw = du \;\&\; v = \int \left(u^2+\lambda^2\right)^{-m-1} u\,du = \frac{1}{2}\frac{\left(u^2+\lambda^2\right)^{-m}}{-m} = \frac{-1}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m}.$$

Al sustituir en la igualdad de integrales:

$$\begin{aligned}\int \frac{\lambda^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} &= \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - \left[wv - \int v\,dw\right] = \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - wv + \int v\,dw = \\ &= \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - u\left[\frac{-1}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m}\right] + \int \frac{-1}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m}\,du = \\ &= \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} + \frac{u}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m} - \frac{1}{2m}\int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} = \\ &= \frac{u}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\lambda^2 \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{u}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}\right].$$

□

Ejercicios 2.6.1 *Fracciones Parciales.* *Preguntas, página 25*

1. $\ln\left[\dfrac{K(x+3)^3}{(x-2)^3}\right]$.
2. $\ln\left[K(x-4)^4(x-5)^5\right]$.
3. $\ln\left[\dfrac{K(x-2)}{(x+2)}\right]$.
4. $\ln\left[\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3}\right]-\dfrac{2}{x-1}+K$.
5. $-\ln x+\dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+K$.
6. $\ln\left[\dfrac{x-3}{x+3}\right]+\dfrac{12}{x^2-9}+K$.
7. $\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{x^2+4}+K$.
8. $\ln\left[\dfrac{K(2x-3)}{2x+3)}\right]$.
9. $\dfrac{2}{x}+\ln\left[\sqrt{x^2-2x+2}\right]$.
10. $\ln\left[K(x^2+2x-3)\right]-\dfrac{1}{x-1}$.
11. $\arctan x+\dfrac{1}{x^2+1}+K$.
12. $\ln\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}-\dfrac{3x-2}{x^2-4}+K$.
13. $-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}+K$.
14. $\ln\left[Kx^3(x-1)\right]+\dfrac{1}{x}$.
15. $\ln\left[\dfrac{K(x-1)}{\sqrt{x^2+4}}\right]-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$.
16.
17. $\ln\left[\dfrac{Kx}{\sqrt{x^2+4}}\right]+\dfrac{2}{x}+\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
18. $\ln\left[\dfrac{K(x-2)\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^2}\right]-\dfrac{3}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.7 Integrales impropias

Hasta aquí, al referirnos a la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ consideramos que f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, el cual tiene una longitud finita $b - a$. Es decir, para la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se exige el cumplimiento de dos requisitos escenciales: la continuidad de la función f en todo el intervalo de integración y además que dicho intervalo sea cerrado. Son estas características las que dan sustento a la definición de la integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

La finitud del intervalo $[a, b]$ nos permite obtener un número finito n de subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y todos de longitud finita $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; y la continuidad de f en todo el intervalo cerrado $[a, b]$ nos permite asegurar la existencia de cada número $f(c_i)$ para $x_{i-1} \le c_i \le x_i$; con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Entonces, tiene sentido hablar de la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, ya que independientemente de la partición realizada, cada término $f(c_i)\Delta x_i$ está bien definido.

Si además de ser continua, $f(x) \ge 0$ para cada $a \le x \le b$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede ser interpretada como el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, $x = b$. En general, para f continua en $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como una suma algebraica de áreas (sumandos positivos); o bien, como una suma algebraica de números (positivos o negativos) . En cualquiera de los casos, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número real fijo.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Ahora trataremos con integrales definidas en las que no se cumple la continuidad de la función f en un intervalo cerrado $[a, b]$; es decir, trataremos con integrales definidas donde no se cumple al menos una de las dos condiciones: continuidad de la función en el intervalo de integración y finitud del intervalo de integración.

- Denominamos integrales impropias aquellas que cumplen:
  1. El intervalo de integración tiene longitud infinita, sección 2.7.1.
  2. El integrando f tiene una asíntota vertical en el intervalo de integración, sección 2.7.2 (pág. 7).

2.7.1 Las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Vamos a considerar cada uno de los casos.

i. ¿Cómo calcular $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$?

Suponiendo la continuidad de la función f en el intervalo $[a, \infty)$, se puede asegurar que f es continua en el intervalo cerrado $[a, r]$ para $r > a$.

Aquí procedemos de la siguiente manera.

- Primero, calculamos la integral definida $\int_a^{r} f(x)\,dx$, la cual resulta ser una función $g(r)$.
- Segundo, se permite a r crecer indefinidamente y se calcula

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \int_a^{r} f(x)\,dx.$$

- Se concluye según sea el resultado del $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r)$.

  a. Cuando $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r) = L$, con $L \in \mathbb{R}$, se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge a L y se escribe $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = L$. Es decir, en este caso se asigna un valor numérico (L) a la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

  b. Cuando $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r) = \infty$, se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge a ∞. En este caso no se asigna un valor numérico a la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Se puede escribir $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$, pero teniendo presente que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \xrightarrow[\text{tiende a}]{\text{diverge a}} \infty$, y que $\infty \notin \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.7.1 *Calcular la integral impropia* $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

▼ La función $f(x) = e^{-x}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, luego es continua en el intervalo $[0, +\infty)$ y por lo mismo es continua en el intervalo cerrado $[0, r]$ para $r > 0$.

Calculamos la integral definida $\int_0^r e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^r e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^r = -e^{-r} - \left(-e^0\right) = -e^{-r} + 1 = 1 - e^{-r} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^r e^{-x}\,dx = g(r) = 1 - e^{-r}.$$

Ahora calculamos $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r)$.

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} (1 - e^r) = \lim_{r\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^r}\right) = 1 - 0 = 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-x}\,dx = 1.$$

Entonces, la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge a 1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

En este caso se asigna el valor numérico 1 a la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

□

Ejemplo 2.7.2 *Calcular la integral impropia* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

▼ La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en todo su dominio $D_f = (0, +\infty)$, por lo que es continua en el intervalo cerrado $[1, r]$ para $r > 1$. Ahora,

$$\int_1^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^r x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^r = 2\sqrt{r} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{r} - 2.$$

Es decir,

$$\int_1^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = g(r) = 2\sqrt{r} - 2.$$

Luego,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \left[2\sqrt{r} - 2\right] = +\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \int_1^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge a $+\infty$.

Es decir, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \xrightarrow[\text{tiende a}]{\text{diverge a}} +\infty$ y podemos escribir $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$.

□

Ejemplo 2.7.3 *Calcular la integral impropia* $\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$.

▼ Por ser $f(x) = xe^{-2x}$ una función continua en todo su dominio $\mathbb{R}$, podemos asegurar su continuidad en el intervalo cerrado $[0, r]$ para $r > 0$. Determinaremos la integral definida $\int_0^r xe^{-2x}\,dx$, calculando primero la integral indefinida $\int xe^{-2x}\,dx$ mediante integración por partes.

$$\underbrace{\int xe^{-2x}\,dx}_{\boxed{\begin{array}{lll} u = x & \& & dv = e^{-2x}\,dx; \\ du = dx & \& & v = -\frac{1}{2}e^{-2x}. \end{array}}} = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1) + C.$$

Luego,

$$\int_0^r xe^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^r = -\frac{1}{4}(2r+1)e^{-2r} + \frac{1}{4}e^0 = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{2r+1}{e^{2r}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^r xe^{-2x}\,dx = g(r) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2r+1}{e^{2r}}\right).$$

Entonces, aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{2r+1}{4e^{2r}}\right] = \frac{1}{4} - \lim_{r\to\infty}\frac{2r+1}{4e^{2r}} = \frac{1}{4} - \lim_{r\to\infty}\frac{(2r+1)'}{(4e^{2r})'} =$$

$$= \frac{1}{4} - \lim_{r\to\infty}\frac{2}{8e^{2r}} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} g(x) = \lim_{r\to\infty}\int_0^r xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}.$$

En este caso, la integral impropia $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ converge a $\frac{1}{4}$.

Por lo tanto, en este caso, la integral impropia $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ tiene un valor numérico asignado, que es $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$.

□

ii. ¿Cómo calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$?

Generalmente la expresión algebraica $-r$ es asociada mentalmente con un número negativo, lo cual es debido a la presencia explícita del signo negativo $(-)$ y sabemos que esto es cierto $(-r < 0)$ cuando $r > 0$. Por simplicidad haremos uso de esta relación.

Considerando que $r > 0$ podemos asegurar que $-r < 0$ y además que $-r \to -\infty$ cuando $r \to +\infty$.

Hecha esta aclaración procedemos a calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ en el supuesto de que la función f sea continua en el intervalo $(-\infty, b]$. El procedimiento es análogo al efectuado en el caso anterior. Con f continua en el intervalo $(-\infty, b]$ se asegura la continuidad de f en el intervalo cerrado $[-r, b]$ para $-r < b$ y calculamos la integral definida $\int_{-r}^b f(x)\,dx$, la cual resulta ser una función $g(r)$. Luego permitimos que $r \to +\infty$, para así lograr que $-r \to -\infty$, y calculamos $\lim_{r\to+\infty} g(r)$.

Se concluye, como en el caso anterior, aclarando si la integral impropia converge o o bien diverge.

Ejemplo 2.7.4 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando $r > 0$, aseguramos que $-r < 0$ y además que $-r \to -\infty$ cuando $r \to +\infty$.

La función $f(x) = e^{x}$ es continua en toda la recta real, por lo que es continua en el intervalo cerrado $[-r, 0]$. Calculamos la integral definida $\displaystyle\int_{-r}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-r}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x}\Big|_{-r}^{0} = e^{0} - e^{-r} = 1 - \frac{1}{e^{r}}.$$

Es decir,

$$\int_{-r}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x = g(r) = 1 - \frac{1}{e^{r}}.$$

Entonces,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{r}}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Esto es,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x$ converge a 1 y escribimos $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x = 1$.

En este caso se asigna un valor numérico (1) a la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x$.

□

Ejemplo 2.7.5 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$.

▼ Considerando $r > 1$ aseguramos que $-r < -1$ y además que $-r \to -\infty$ cuando $r \to +\infty$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ es continua en el intervalo cerrado $[-r, -1]$.

Calculamos la integral definida $\displaystyle\int_{-r}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$.

$$\int_{-r}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-r}^{-1} x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-r}^{-1} = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^{2}}\right]\Big|_{-r}^{-1} =$$
$$= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(-1)^{2}} - \sqrt[3]{(-r)^{2}}\right] = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{r^{2}}\right] = \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{r^{2}}\right).$$

Es decir,

$$\int_{-r}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = g(r) = \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{r^{2}}\right).$$

Luego,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty}\left[\frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{r^{2}}\right)\right] = \frac{3}{2} - \infty = -\infty.$$

Esto es,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Se tiene en este caso que la integral impropia $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$ diverge a $-\infty$.

Expresado de otra manera, $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[\text{tiende a}]{\text{diverge a}} -\infty$, y podemos escribir $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$ teniendo presente que $-\infty$ no es valor numérico.

□

iii. ¿Cómo calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Por supuesto, se supone que f es una función continua en toda la recta real $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Aquí se considera que para algún real a fijo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge cuando ambas integrales $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ & $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ convergen.
- La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge cuando al menos una de las integrales $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ o bien $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Ejemplo 2.7.6 *Calcular la integral impropia* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Tomando al real fijo $a = 0$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Calculamos estas integrales impropias

a.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} \int_{0}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} [\arctan x]_0^r = \lim_{r\to\infty} [\arctan r - 0] =$$
$$= \lim_{r\to\infty} [\arctan r] = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces la integral $\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ converge a $\frac{\pi}{2}$.

b. Por ser $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ una función par:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces la integral $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ converge a $\frac{\pi}{2}$.

c. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

Ejercicios 2.7.1 *Integrales impropias.* *Soluciones en la página* 13

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$.
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x}}$.
3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$.
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} 9e^{-3x}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^{\infty} 4xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$.
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
11. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
13. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.
14. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.
15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x$.
16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$.
17. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.
18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2.7.2 Integrales impropias $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ con asíntota vertical

Aquí consideramos integrales impropias del tipo:

i. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en $(a,b]$ y con $x=a$ asíntota vertical.

ii. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en $[a,b)$ y con $x=b$ asíntota vertical.

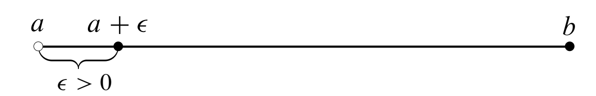
iii. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en $[a,b]$, excepto en $c\in(a,b)$ donde f tiene una discontinuidad infinita.

¿Cómo proceder para calcular estos tipos de integrales impropias?

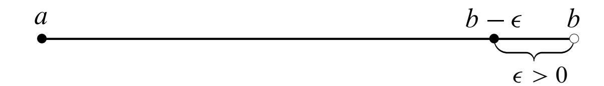
En general, para calcular estas integrales impropias, se propone evitar el punto problemático $x=a$ en las integrales de primer tipo; $x=b$ en las de segundo tipo; $x=c$ en las de tercer tipo.

¿Cómo evitar el punto problemático? Guardando una sana distancia de él. Dicha distancia será lograda considerando un número real positivo ξ, que servirá para denotar una separación del punto problemático. Es decir, el número $\xi>0$ será utilizado para evitar el punto problemático:

i. $x=a$, considerando el intervalo cerrado $[a+\xi,b]$ en vez del intervalo semiabierto $(a,b]$:



ii. $x=b$, considerando el intervalo cerrado $[a,b-\xi]$ en vez del intervalo semiabierto $[a,b)$:



iii. $x=c$, considerando los intervalos cerrados $[a,c-\xi]$ y $[c+\xi,b]$ en vez de los intervalos $[a,c)$ y $(c,b]$:

$$a \quad c-\epsilon \quad c \quad c+\epsilon \quad b$$
$$\epsilon > 0 \quad \epsilon > 0$$

Ya sabemos cómo evitar el punto problemático. Ahora procedemos a calcular la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado.

i. Calculamos $\int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx$, con f continua en un intervalo cerrado $[a+\xi, b]$. Aquí se obtiene una función:
$$g(\xi) = \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

ii. Calculamos $\int_{a}^{b-\xi} f(x)\,dx$, con f continua en un intervalo cerrado $[a, b-\xi]$. Aquí se obtiene una función:
$$g(\xi) = \int_{a}^{b-\xi} f(x)\,dx.$$

iii. Calculamos las integrales definidas $\int_{a}^{c-\xi} f(x)\,dx$ & $\int_{c+\xi}^{b} f(x)\,dx$ en los intervalos cerrados $[a, c-\xi]$ & $[c+\xi, b]$, respectivamente. También aquí se obtiene una función:
$$g(\xi) = \int_{a}^{c-\xi} f(x)\,dx + \int_{c+\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Para cada caso tenemos una $g(\xi)$. Ahora proponemos $\xi \to 0^{+}$ y calculamos $\lim_{\xi \to 0^{+}} g(\xi)$. Finalmente, concluimos aclarando si la integral impropia converge o diverge, así como en los casos anteriormente ejemplificados. Esto es,

- Si $\lim_{\xi \to 0^{+}} g(\xi) = L$, con $L \in \mathbb{R}$, entonces la integral impropia correspondiente converge a L;
- Si $\lim_{\xi \to 0^{+}} g(\xi) = \infty$, entonces la integral impropia correspondiente diverge a ∞.

Ejemplo 2.7.7 *Calcular la integral impropia* $\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

▼ La función $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ es continua en todo su dominio $D_f = (1, +\infty)$ y además la recta $x = 1$ es una asíntota vertical para f ya que $\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.

Entonces, la integral $\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ es impropia con f continua en el intervalo $(1, 5]$. Evitamos el punto problemático $x = 1$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando el intervalo cerrado $[1+\xi, 5]$ donde f es continua.

Calculamos la integral definida $\int_{1+\xi}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

$$\int_{1+\xi}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_{1+\xi}^{5} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{1+\xi}^{5} = 2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\xi}^{5} =$$
$$= 2\sqrt{5-1} - 2\sqrt{1+\xi-1} = 2(2) - 2\sqrt{\xi} = 4 - 2\sqrt{\xi}.$$

Se tiene aquí la función $g(\xi) = 4 - 2\sqrt{\xi}$.

Calculamos $\displaystyle\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi)$:

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \left[4 - 2\sqrt{\xi}\right] = 4 - 2(0) = 4.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \int_{1+\xi}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 4.$$

Se tiene en este caso que la integral impropia $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ converge a 4 y escribimos $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 4$. Esto es, se asigna el valor numérico 4 a la integral impropia $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

□

Ejemplo 2.7.8 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ y además la recta $x = 2$ es una asíntota vertical para f ya que $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, así como $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$ es impropia con f continua en el intervalo $(2, 4]$. Evitamos el punto problemático $x = 2$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando el intervalo cerrado $[2 + \xi, 4]$ donde f es continua. Ahora bien,

$$\int_{2+\xi}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_{2+\xi}^{4} (x-2)^{-2}\, dx = \left.\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\right|_{2+\xi}^{4} = -\left.\frac{1}{x-2}\right|_{2+\xi}^{4} =$$
$$= -\frac{1}{4-2} + \frac{1}{2+\xi-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2}.$$

Veamos la función $g(\xi) = \dfrac{1}{\xi} - \dfrac{1}{2}$.

Esta función cumple:

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2}\right] = +\infty.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \int_{2+\xi}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Entonces, en este caso, la integral impropia $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$ diverge a $+\infty$, y no se asigna un valor numérico a esta integral impropia.

□

Ejemplo 2.7.9 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.

▼ La función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-x}}$ es continua en todo su dominio $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ y además la recta $x = 2$ es una asíntota vertical ya que $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}}$ es impropia, con g continua en el intervalo $[1,2)$. Evitamos el punto problemático $x = 2$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando el intervalo cerrado $[1, 2-\xi]$ donde g es continua. Ahora,

$$\int_1^{2-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}} = \int_1^{2-\xi} (2-x)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}(2-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^{2-\xi} =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[2-(2-\xi)\right]^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(2-1)^{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}(\xi)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}.$$

Se tiene aquí la función $h(\xi) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}(\xi)^{\frac{2}{3}}$.

Entonces:

$$\lim_{\xi\to 0^+} h(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+} \frac{3}{2}\left(1-(\xi)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}\lim_{\xi\to 0^+}\left(1-\sqrt[3]{\xi^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi\to 0^+} h(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+} \int_1^{2-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}}$ converge al número $\dfrac{3}{2}$ y escribimos $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}} = \frac{3}{2}$.

□

Ejemplo 2.7.10 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^3}$ es continua en su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ y además la recta $x = 3$ es una asíntota vertical ya que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(3-x)^3} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$ es impropia, con f continua en el intervalo $[0,3)$. Evitamos al punto problema $x = 3$ tomando un número real $\xi > 0$ y considerando el intervalo cerrado $[0, 3-\xi]$ donde f es continua. Ahora bien,

$$\int_0^{3-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3} = \int_0^{3-\xi} (3-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{(3-x)^{-2}}{-2}\Big|_0^{3-\xi} = \frac{1}{2(3-x)^2}\Big|_0^{3-\xi} =$$

$$= \frac{1}{2[3-(3-\xi)]^2} - \frac{1}{2(3-0)^2} = \frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{18}.$$

Tenemos aquí la función $g(\xi) = \dfrac{1}{2\xi^2} - \dfrac{1}{18}$.

De lo que se obtiene

$$\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+}\left[\frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{18}\right] = +\infty.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+} \int_0^{3-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3} = +\infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$ diverge a $+\infty$.

□

Ejemplo 2.7.11 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$.

▼ La función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ es continua en todo su dominio $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ y además la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de g ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ es impropia, con g continua en el intervalo $[0,3]$ excepto en $x = 1$ donde tiene una discontinuidad infinita.

Aislamos el punto problemático $x = 1$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando los intervalos cerrados $[0, 1-\xi]$ & $[1+\xi, 3]$ donde la función g es continua. Ahora bien, por la propiedad de aditividad respecto al intervalo:

$$\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ & $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ son impropias.

Por esta razón calculamos la suma de las integrales

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1+\xi}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} &= \int_0^{1-\xi} (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x + \int_{1+\xi}^3 (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{1-\xi} + \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_{1+\xi}^3 = \\
&= \left[\frac{3}{2}(1-\xi-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(0-1)^{\frac{2}{3}}\right] + \left[\frac{3}{2}(3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(1+\xi-1)^{\frac{2}{3}}\right] = \\
&= \frac{3}{2}(-\xi)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(2)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\xi)^{\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(-\xi)^2} - \sqrt[3]{(-1)^2} + \sqrt[3]{(2)^2} - \sqrt[3]{(\xi)^2}\right] = \\
&= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{\xi^2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{\xi^2}\right] = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Para luego calcular

$$\lim_{\xi\to 0^+}\left[\int_0^{1-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1+\xi}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}\right] = \lim_{\xi\to 0^+}\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\right] = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right).$$

y debido a que, cuando $\xi \to 0^+$,

$$\left[\int_0^{1-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1+\xi}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}\right] \longrightarrow \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}},$$

podemos decir que la integral impropia $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ converge a $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$.

Es decir,

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right).$$

□

Ejercicios 2.7.2 *Integrales impropias.* *Soluciones en la página* 13

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.
2. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{(x-1)^2}$.
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.
4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^3}$.
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.
6. $\displaystyle\int_0^e \ln x \, dx$.
7. $\displaystyle\int_0^e x \ln x \, dx$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$.
9. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$.
10. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$.
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$.
13. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$.
14. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$.
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} \, dx$.
16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$.
17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x \, dx}{x^2-1}$.
18. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ejercicios 2.7.1 *Integrales impropias.* *Preguntas, página 6*

1. Converge a $\frac{1}{3}$.
2. Diverge a ∞.
3. Converge a 2.
4. Diverge a ∞.
5. Converge a 3.
6. Diverge a ∞.
7. Converge a $\frac{2}{e}$.
8. Converge a 1.
9. Converge a 1.
10. Converge a 0.
11. Converge a 2.
12. Converge a $\frac{\pi^2}{8}$.
13. Diverge a ∞.
14. Converge a $\frac{\pi}{4}$.
15. Converge a $-\frac{1}{2}$.
16. Converge a $\frac{\pi}{2}$.
17. Diverge a ∞.
18. Diverge a ∞.

Ejercicios 2.7.2 *Integrales impropias.* *Preguntas, página 11*

1. Converge a 4.
2. Diverge a ∞.
3. Converge a $2\sqrt{2}$.
4. Diverge a ∞.
5. Converge a $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.
6. Converge a 0.
7. Converge a $\frac{e^2}{4}$.
8. Converge a $\frac{1}{e}$.
9. Diverge a ∞.
10. Diverge a ∞.
11. Converge a $\frac{\pi}{2}$.
12. Diverge a ∞.
13. Converge a 0.
14. Converge a $-\frac{1}{9}$.
15. Converge a $2\sqrt{1-e^{-1}}$.
16. Diverge a ∞.
17. Diverge a ∞.
18. Converge a 2.

CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.8 Combinación de métodos de integración

2.8.1 Introducción

En las secciones anteriores hemos tratado con tres métodos de integración: cambio de variable, por partes y fracciones parciales y algunas técnicas de integración que hacen uso de identidades trigonométricas.

Mediante los métodos y técnicas de integración hemos aprendido a calcular familias de integrales:

$$\int x^n e^{ax}\,dx; \qquad \int x^n \operatorname{sen} ax\,dx; \qquad \int x^n \cos ax\,dx;$$
$$\int x^r \ln ax\,dx; \qquad \int \operatorname{sen}^r x \cos x\,dx; \qquad \int \cos^r x \operatorname{sen} x\,dx;$$
$$\int \tan^r x \sec^2 x\,dx; \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen} kx\,dx; \qquad \int e^{ax} \cos kx\,dx;$$

entre otras. En esta sección trataremos con integrales que no son del estilo de las ya tratadas, pero que pueden ser llevadas a estas después de haber aplicado un cambio de variable adecuado, o bien después de haber integrado por partes.

2.8.2 Cambio de variable y luego integración por partes

Integrales de la forma

$$\int e^{\sqrt[n]{ax+b}}\,dx; \qquad \int \operatorname{sen} \sqrt[n]{ax+b}\,dx;$$
$$\int \cos \sqrt[n]{ax+b}\,dx; \qquad \int \ln \sqrt[n]{ax+b}\,dx \qquad \text{donde } n \in \mathbb{N}\ \&\ n \geq 2.$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Al aplicar un cambio de variable apropiado, la integral original se convierte en otra integral en donde el integrando no contiene dicha raíz.

$$\sqrt[n]{ax+b} = y \;\Rightarrow\; ax+b = y^n \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{a}(y^n - b) \quad \& \quad dx = \frac{n}{a}y^{n-1}\,dy.$$

Luego,

- $\displaystyle\int e^{\sqrt[n]{ax+b}}\,dx = \int e^y\left(\frac{n}{a}y^{n-1}\,dy\right) = \frac{n}{a}\int y^{n-1}e^y\,dy.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt[n]{ax+b}\,dx = \int (\operatorname{sen} y)\left(\frac{n}{a}y^{n-1}\,dy\right) = \frac{n}{a}\int y^{n-1}\operatorname{sen} y\,dy.$
- $\displaystyle\int \cos\sqrt[n]{ax+b}\,dx = \int (\cos y)\left(\frac{n}{a}y^{n-1}\,dy\right) = \frac{n}{a}\int y^{n-1}\cos y\,dy.$

Obtenemos aquí integrales que se calculan aplicando el método de integración por partes $n-1$ veces. Es decir, después de un cambio de variable adecuado, hemos obtenido integrales pertenecientes a grandes familias que se calculan mediante integración por partes.

Ejemplo 2.8.1 *Calcular la integral* $\displaystyle\int e^{\sqrt{2x-3}}\,dx$.

▼ Si $\sqrt{2x-3} = y$, entonces $2x-3 = y^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\left(y^2+3\right) \;\&\; dx = y\,dy$.

Luego,

$$\int e^{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int e^y y\,dy = \int ye^y\,dy.$$

Aplicamos integración por partes, tomando

$$u = y \;\&\; dv = e^y\,dy \;\Rightarrow\; du = dy \;\&\; v = e^y.$$

Entonces,

$$\int e^{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int ye^y\,dy = ye^y - \int e^y\,dy = ye^y - e^y + C = (y-1)e^y + C = \left(\sqrt{2x-3}-1\right)e^{\sqrt{2x-3}} + C.$$

□

Ejemplo 2.8.2 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx$.

▼ Si $\sqrt[3]{x} = y$, entonces $x = y^3 \;\&\; dx = 3y^2\,dy$. Luego,

$$\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx = \int (\cos y)3y^2\,dy = 3\int y^2\cos y\,dy.$$

Aplicamos integración por partes, seleccionando

$$u = y^2 \;\&\; dv = \cos y\,dy \;\Rightarrow\; du = 2y\,dy \;\&\; v = \operatorname{sen} y.$$

Entonces:

$$\int y^2\cos y\,dy = y^2\operatorname{sen} y - \int (\operatorname{sen} y)2y\,dy = y^2\operatorname{sen} y - 2\int y\operatorname{sen} y\,dy.$$

De nuevo por partes:

$$\hat{u} = y \;\&\; d\hat{v} = \operatorname{sen} y \;\Rightarrow\; d\hat{u} = dy \;\&\; v = -\cos y.$$

Obtenemos:

$$\int y^2\cos y\,dy = y^2\operatorname{sen} y - 2\int y\operatorname{sen} y\,dy = y^2\operatorname{sen} y - 2\left[-y\cos y + \int \cos y\,dy\right] =$$
$$= y^2\operatorname{sen} y + 2y\cos y - 2\operatorname{sen} y + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx = 3\int y^2\cos y\,dy = 3\left[y^2\operatorname{sen} y + 2y\cos y - 2\operatorname{sen} y\right] + C = 3\left(y^2-2\right)\operatorname{sen} y + 6y\cos y + C =$$
$$= 3\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2\right]\operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x} + C = 3\left[\sqrt[3]{x^2}-2\right]\operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

□

2.8.3 Integración por partes y luego otra técnica

Integrales de la forma

$$\int x^n\arcsen x\,dx;\quad \int x^n\arccos x\,dx;\quad \int x^n\arctan x\,dx;$$
$$\int x^n\operatorname{arccot} x\,dx;\quad \int x^n\operatorname{arcsec} x\,dx;\quad \int x^n\operatorname{arccsc} x\,dx,$$

donde n es un entero no-negativo.

Aquí conviene aplicar integración por partes seleccionando

$$dv = x^n\,dx \;\&\; u = \text{arc}__.$$

- $\int x^n\arcsen x\,dx$.

$$\underbrace{\int x^n\arcsen x\,dx}_{\begin{array}{|ccc|} u=\arcsen x & \& & dv = x^n\,dx; \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \& & v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsen x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsen x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ahora, por sustitución trigonométrica:

$$x = \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; dx = \cos\theta\,d\theta \quad \& \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta.$$

Luego,

$$\int x^n\arcsen x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsen x - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsen x - \frac{1}{n+1}\int\frac{\operatorname{sen}^{n+1}\theta}{\cos\theta}(\cos\theta\,d\theta) =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsen x - \frac{1}{n+1}\int\operatorname{sen}^{n+1}\theta\,d\theta,$$

donde $n+1$ es un entero positivo que puede ser par o impar.

- $\int x^n \arccos x \, dx$.

$$\int x^n \arccos x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arccos x + \frac{1}{n+1} \int \operatorname{sen}^{n+1} \theta \, d\theta.$$

Se obtiene de manera análoga al caso anterior.

- $\int x^n \arctan x \, dx$.

$$\underbrace{\int x^n \arctan x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = \arctan x & \& & dv = x^n \, dx; \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & \& & v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}}} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arctan x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \arctan x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \, dx,$$

donde $n+1$ es un número natural y donde $\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}$ es una división de polinomios.

- $\int x^n \operatorname{arccot} x \, dx$.

$$\int x^n \operatorname{arccot} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arccot} x + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \, dx.$$

Se obtiene de manera análoga al último caso.

- $\int x^n \operatorname{arcsec} x \, dx$.

$$\underbrace{\int x^n \operatorname{arcsec} x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = \operatorname{arcsec} x & \& & dv = x^n \, dx; \\ du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} & \& & v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}}} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}} \, dx.$$

Ahora, por sustitución trigonométrica:

$$x = \sec \theta \;\Rightarrow\; dx = \sec \theta \cdot \tan \theta \; d\theta \quad \& \quad \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \tan \theta.$$

Luego,

$$\int x^n \operatorname{arcsec} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{\sec^n \theta}{\tan \theta} (\sec \theta \cdot \tan \theta) \, d\theta =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{n+1} \int \sec^{n+1} \theta \, d\theta,$$

donde $n+1$ es un natural, que puede ser par o impar.

- $\int x^n \operatorname{arccsc} x \, dx$.

$$\int x^n \operatorname{arccsc} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arccsc} x + \frac{1}{n+1} \int \sec^{n+1} \theta \, d\theta.$$

Se obtiene de manera análoga al último caso.

Ejemplo 2.8.3 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arcsen} x \, dx$.

▼ Primero aplicamos la integración por partes

$$\underbrace{\int x^2 \operatorname{arcsen} x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = \operatorname{arcsen} x & \& & dv = x^2\,dx; \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \& & v = \frac{x^3}{3}. \end{array}}} = (\operatorname{arcsen} x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ahora, por sustitución trigonométrica:

$$x = \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; dx = \cos\theta\, d\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\, dx = \cos\theta.$$

Luego,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta}(\cos\theta)\,d\theta = \int \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \int \operatorname{sen}^2\theta \;\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \int \left(1-\cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int \left(1-y^2\right)(-dy) \qquad (\text{ para } y = \cos\theta)$$

$$= \int \left(y^2-1\right)dy = \frac{1}{3}y^3 - y + C_1 = \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + C_1 = \frac{1}{3}\left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos^2\theta - 3\right)\cos\theta + C_1 = \frac{1}{3}\left[\left(1-x^2\right)-3\right]\sqrt{1-x^2} + C_1 = -\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2} + C_1.$$

Por lo tanto,

$$\int x^2 \operatorname{arcsen} x\, dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}\right] + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{9}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2} + C.$$

□

Ejemplo 2.8.4 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^3 \arctan x \, dx$.

▼ Primero aplicamos la integración por partes

$$\underbrace{\int x^3 \arctan x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = \arctan x & \& & dv = x^3\,dx; \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & \& & v = \frac{x^4}{4}. \end{array}}} = (\arctan x)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^4}{4}\arctan x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Efectuando la división:

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int x^3 \arctan x\, dx = \frac{x^4}{4}\arctan x - \frac{1}{4}\int\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^4}{4}\arctan x - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right] + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^4\arctan x - \frac{x^3}{3} + x - \arctan x\right] + C.$$

□

Ejemplo 2.8.5 *Calcular la integral* $\int x \operatorname{arccos} x \, dx$.

▼ Primero aplicamos la integración por partes

$$\underbrace{\int x \operatorname{arccos} x \, dx}_{} = (\operatorname{arccos} x)\frac{x^2}{2} - \int -\frac{x^2}{2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arccos} x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} u = \operatorname{arccos} x & \& & dv = x\, dx; \\ du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \& & v = \dfrac{x^2}{2}. \end{array}}$$

Ahora, por sustitución trigonométrica:

$$x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta \, d\theta \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta.$$

Luego,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}(\cos\theta)\, d\theta = \int \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right] + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta \cos\theta)\right] + C_1 = \frac{1}{2}[\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\theta] + C_1 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcsen} x - x\sqrt{1-x^2}\right] + C_1.$$

Por lo tanto,

$$\int x\operatorname{arccos} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arccos} x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arccos} x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\operatorname{arcsen} x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arccos} x + \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$$

□

Ejemplo 2.8.6 *Calcular la integral* $\int x^3 \operatorname{arcsec} x\, dx$.

▼ Aplicamos primero integración por partes.

$$\underbrace{\int x^3 \operatorname{arcsec} x\, dx}_{} = (\operatorname{arcsec} x)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} u = \operatorname{arcsec} x & \& & dv = x^3\, dx; \\ du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} & \& & v = \dfrac{x^4}{4}. \end{array}}$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\int x^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

De nuevo aplicamos integración por partes:

$$\hat{u} = x^2 \quad \& \quad d\hat{v} = \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} x\, dx \Rightarrow d\hat{u} = 2x\, dx \quad \& \quad \hat{v} = \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces,

$$\int x^3\operatorname{arcsec} x\, dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\int x^2\frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\left[x^2\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} - \int \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} 2x\, dx\right] =$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{4}\left[x^2\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right] + C =$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{x^2}{4}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arcsec} x - \frac{x^2}{4}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{6}\sqrt{\left(x^2-1\right)^3} + C.$$

□

2.8.4 Cambio de variable y luego fracciones parciales

Trataremos integrales en las que el integrando sea, de preferencia, un cociente de funciones y que presente repetición de alguna función $\phi(x)$; por ejemplo, exponencial, trigonométrica, radical, entre otras.

Al tener una función $\phi(x)$ repetida en el integrando se sugiere aplicar el cambio de variable $u = \phi(x)$.

Ejemplos de estas integrales son:

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}; \quad \int \frac{2e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,dx; \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx.$$

Ejemplo 2.8.7 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$.

▼ Como $e^{2x} = (e^x)^2$, entonces en el integrando hay una repetición de la función $\phi(x) = e^x$. Por esto, pensamos en el cambio de variable $u = e^x$. Con $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$ y además

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2 - 3\,(e^x) + 2} = \int \frac{du}{u^2 - 3u + 2}.$$

Ahora aplicamos fracciones parciales.

$$\frac{1}{u^2 - 3u + 2} = \frac{1}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} = \frac{A(u-2) + B(u-1)}{(u-1)(u-2)}.$$

Igualando polinomios del numerador:

$$1 = A(u-2) + B(u-1). \qquad (*)$$

Usando $u = 2$ en (*) $\Rightarrow 1 = A(0) + B(1) \Rightarrow B = 1$.
Usando $u = 1$ en (*) $\Rightarrow 1 = A(-1) + B(0) \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$.

Luego,

$$\frac{1}{u^2 - 3u + 2} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} = \frac{-1}{u-1} + \frac{1}{u-2} = \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u-1}.$$

Entonces,

$$\int \frac{1}{u^2 - 3u + 2} = \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u-1}\right) du = \int \frac{du}{u-2} - \int \frac{du}{u-1} = \ln(u-2) - \ln(u-1) + C =$$
$$= \ln\left(\frac{u-2}{u-1}\right) + C.$$

Por lo tanto, como $u = e^x$,

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \ln\left(\frac{e^x - 2}{e^x - 1}\right) + C.$$

□

Ejemplo 2.8.8 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,dx$.

▼ Como $e^{2x} = (e^x)^2$, entonces en el integrando hay una repetición de la función exponencial $\phi(x) = e^x$. Esto nos sugiere el cambio de variable $u = e^x$.

$$u = e^x \;\Rightarrow\; x = \ln u \quad \& \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Luego,

$$\int \frac{2e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\,(e^x)^2 + (e^x) + 1}{(e^x)^2 + 1}(\mathrm{d}x) = \int \frac{2u^2 + u + 1}{u^2 + 1}\left(\frac{\mathrm{d}u}{u}\right) = \int \frac{2u^2 + u + 1}{u\,(u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u.$$

Ahora aplicamos fracciones parciales.

$$\frac{2u^2 + u + 1}{u\,(u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 1} = \frac{A\left(u^2 + 1\right) + (Bu + C)u}{u\,(u^2 + 1)}.$$

Igualando los polinomios de los numeradores:

$$2u^2 + u + 1 = (A + B)u^2 + (C)u + (A).$$

Igualamos coeficientes de términos semejantes:

$$A + B = 2; \quad C = 1; \quad A = 1.$$

Entonces:

$$B = 1; \quad C = 1; \quad A = 1$$

Luego,

$$\frac{2u^2 + u + 1}{u\,(u^2 + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 1} = \frac{1}{u} + \frac{u + 1}{u^2 + 1}.$$

Por lo tanto, como $u = e^x$,

$$\int \frac{2e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{u + 1}{u^2 + 1}\right)\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{u^2 + 1} + \frac{1}{u^2 + 1}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \ln u + \frac{1}{2}\ln\left(u^2 + 1\right) + \arctan u + C = \ln e^x + \ln\left(e^{2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \arctan\left(e^x\right) + C =$$

$$= x + \ln\sqrt{e^{2x} + 1} + \arctan\left(e^x\right) + C.$$

□

Ejemplo 2.8.9 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

▼ Tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; (\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}(\cos x).$$

Observe una repetición de la función $\cos x$ en el integrando. Por esto aplicamos el cambio de variable $y = \cos x$.

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\,\mathrm{d}(\cos x)}{(\cos x) + (\cos x)^2} = \int \frac{-\,\mathrm{d}y}{y + y^2} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y + y^2}.$$

Ahora aplicamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{y + y^2} = \frac{1}{y(1 + y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 + y} = \frac{A(1 + y) + By}{y(1 + y)} = \frac{(A + B)y + (A)}{y(1 + y)}.$$

$$1 = (A + B)y + (A) \;\Leftrightarrow\; A + B = 0 \quad \& \quad A = 1 \;\Leftrightarrow\; A = 1 \quad \& \quad B = -1.$$

Luego,

$$\frac{1}{y+y^2}=\frac{A}{y}+\frac{B}{1+y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}.$$

Por lo que,

$$-\int\frac{dy}{y+y^2}=-\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}\right)dy=\int\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{y}\right)dy=\ln(1+y)-\ln y+C=\ln\left(\frac{1+y}{y}\right)+C.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx=-\int\frac{dy}{y+y^2}=\ln\left(\frac{1+y}{y}\right)+C=\ln\left(\frac{1}{y}+1\right)+C=$$
$$=\ln\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)+C=\ln(\sec x+1)+C.$$

□

Ejemplo 2.8.10 *Calcular la integral* $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

▼ Es notoria la repetición del radical $\sqrt{x+1}$ o bien de $(x+1)$. Optamos por eliminar el radical, por lo que aplicaremos el cambio de variable $\sqrt{x+1}=y$. Veamos:

$$\sqrt{x+1}=y\ \Rightarrow\ x+1=y^2\ \Rightarrow\ x=y^2-1\ \&\ dx=2y\,dy.$$

Luego,

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{y+2}{(y^2)^2-y}(2y\,dy)=\int\frac{2y(y+2)}{y^4-y}\,dy=\int\frac{2y(y+2)}{y\,(y^3-1)}\,dy=\int\frac{2(y+2)}{y^3-1}\,dy.$$

Aplicamos fracciones parciales a continuación

$$\frac{2(y+2)}{y^3-1}=\frac{2y+4}{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1}=\frac{A\left(y^2+y+1\right)+(By+C)(y-1)}{(y-1)\left(y^2+y+1\right)};$$
$$2y+4=A\left(y^2+y+1\right)+B\left(y^2-y\right)+C(y-1);$$
$$2y+4=(A+B)y^2+(A-B+C)y+(A-C);$$
$$A+B=0;\quad A-B+C=2;\quad A-C=4;$$
$$B=-A;\quad A-B+C=2;\quad C=A-4;$$
$$A-(-A)+(A-4)=2;$$
$$A+A+A=2+4;$$
$$3A=6\ \Rightarrow\ A=2;$$
$$A=2\ \Rightarrow\ B=-A=-2\quad\&\quad C=A-4=2-4=-2.$$

Luego,

$$\frac{2(y+2)}{y^3-1}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1}=\frac{2}{y-1}+\frac{-2y-2}{y^2+y+1}=\frac{2}{y-1}-\frac{2y+2}{y^2+y+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{2(y+2)}{y^3-1}\,dy=\int\left(\frac{2}{y-1}-\frac{2y+2}{y^2+y+1}\right)dy=\int\left(\frac{2}{y-1}-\frac{2y+1+1}{y^2+y+1}\right)dy=$$
$$=\int\left(\frac{2}{y-1}-\frac{2y+1}{y^2+y+1}-\frac{1}{y^2+y+1}\right)dy=$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\ln(y-1) - \ln\left(y^2+y+1\right) - \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \\
&= \ln(y-1)^2 - \ln\left(y^2+y+1\right) - \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
&= \ln\left[\frac{(y-1)^2}{y^2+y+1}\right] - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\tfrac{1}{2}\right) + K = \\
&= \ln\left[\frac{(y-1)^2}{y^2+y+1}\right] - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + K = \\
&= \ln\left[\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{(x+2)+\sqrt{x+1}}\right] - \tfrac{2}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{3}\right) + K.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.8.11 *Calcular la integral* $\int \sqrt{\tan x}\, dx$.

▼ Aquí no hay una función repetida; aún más, sólo tenemos una función $\sqrt{\tan x}$, la cual tomamos para un cambio de variable.

$$
\sqrt{\tan x} = y \;\Rightarrow\; \tan x = y^2 \;\Rightarrow\; x = \arctan y^2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{2y\,dy}{1+y^4}.
$$

Entonces,

$$
\int \sqrt{\tan x}\, dx = \int y\left(\frac{2y\,dy}{1+y^4}\right) = \int \frac{2y^2}{y^4+1}\,dy.
$$

Ahora aplicamos fracciones parciales, para lo cual factorizamos el polinomio denominador

$$
\begin{aligned}
y^4+1 = y^4+2y^2+1-2y^2 = \left(y^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}y\right)^2 = \left(y^2+1+\sqrt{2}y\right)\left(y^2+1-\sqrt{2}y\right) = \\
= \left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right).
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{2y^2}{y^4+1} &= \frac{2y^2}{\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right)} = \frac{Ay+B}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{Cy+D}{y^2-\sqrt{2}y+1} = \\
&= \frac{(Ay+B)\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right) + (Cy+D)\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)}{\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right)}.
\end{aligned}
$$

Igualdad que se cumple cuando

$$
\begin{aligned}
2y^2 &= A\left(y^3-\sqrt{2}y^2+y\right) + B\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right) + C\left(y^3+\sqrt{2}y^2+y\right) + D\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right); \\
2y^2 &= (A+C)y^3 + \left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)y^2 + \left(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D\right)y + (B+D).
\end{aligned}
$$

Igualdad de polinomios que ocurre cuando

$$
\begin{cases}
A+C=0; & \text{(Ec. 1)}\\
-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=2; & \text{(Ec. 2)}\\
A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0; & \text{(Ec. 3)}\\
B+D=0. & \text{(Ec. 4)}
\end{cases}
$$

Aplicando (Ec. 4) en (Ec. 2) se obtiene

$$-\sqrt{2}A + (B + D) + \sqrt{2}C = 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}A + \sqrt{2}C = 2 \Leftrightarrow -A + C = \sqrt{2}.$$

Aplicando (Ec. 1) en (Ec. 3) se obtiene

$$(A + C) - \sqrt{2}B + \sqrt{2}D = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}B + \sqrt{2}D = 0 \Leftrightarrow -B + D = 0.$$

Tenemos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + C = 0; & \text{(Ec. 1)} \\ -A + C = \sqrt{2}; & \text{(Ec. 2')} \\ -B + D = 0; & \text{(Ec. 3')} \\ B + D = 0. & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\text{(Ec. 1)} + \text{(Ec. 2')} \Rightarrow 2C = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \& \quad A = -C = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{(Ec. 3')} + \text{(Ec. 4')} \Rightarrow 2D = 0 \qquad \Rightarrow D = 0 \quad \& \quad B = -D = 0.$$

Entonces, la solución del sistema de ecuaciones es

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B = 0; \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\&\; D = 0.$$

Luego,

$$\frac{2y^2}{y^4+1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}y + 0}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}y + 0}{y^2-\sqrt{2}y+1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}y}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}y + 0}{y^2-\sqrt{2}y+1}.$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2y^2}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-\sqrt{2}y+1} = \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2y}{y^2+\sqrt{2}y+1}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{2y}{y^2-\sqrt{2}y+1}\,\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\left(2y+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}y+1}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\left(2y-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1}\,\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}y+1} - \frac{\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{2y-\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1} + \frac{\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1}\right)\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-\sqrt{2}y+1} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left(y^2-\sqrt{2}y+1\right) - \ln\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-\sqrt{2}y+1}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right) + \frac{1}{2}\left[\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right) + \frac{1}{2}\left[\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right)+\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]+K=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\sqrt{2}y+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}y-1\right)\right]+K=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}y+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}y-1\right)\right]+K=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right]^{\frac{1}{2}}+\arctan\left(\sqrt{2}y+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}y-1\right)\right]+K.$$

Debido a que $y=\sqrt{\tan x}$, concluimos:

$$\int\sqrt{\tan x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right)^{\frac{1}{2}}+\arctan\left(\sqrt{2\tan x}+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2\tan x}-1\right)\right]+K.$$

□

2.8.5 Cambio de variable especial y luego la integral de una función racional

A partir de una función racional de senos y cosenos, vamos a presentar un cambio de variable que nos permite convertir nuestra integral en una integral de una función racional.

Primero obtendremos un par de identidades en las que se relacionan las funciones seno, coseno y tangente, para luego ejemplificar el uso de dichas identidades para calcular este tipo de integrales.

- Debido a que

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha \quad \& \quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

Y considerando $2\alpha=\theta$, es decir $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$,

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\ \Rightarrow\ \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

Ahora, si $m=\tan\frac{\theta}{2}$ y $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{2m}{1-m^2}\ \Rightarrow\ \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\left(\frac{2m}{1-m^2}\right)^2=\frac{4m^2}{(1-m^2)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(1-m^2\right)^2\operatorname{sen}^2\theta=4m^2\cos^2\theta\ \Rightarrow\ \left(1-m^2\right)^2\operatorname{sen}^2\theta=4m^2\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)=4m^2-4m^2\operatorname{sen}^2\theta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(1-m^2\right)^2\operatorname{sen}^2\theta+4m^2\operatorname{sen}^2\theta=4m^2\ \Rightarrow\ \left[\left(1-m^2\right)^2+4m^2\right]\operatorname{sen}^2\theta=4m^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[1-2m^2+m^4+4m^2\right]\operatorname{sen}^2\theta=4m^2\ \Rightarrow\ \left[1+2m^2+m^4\right]\operatorname{sen}^2\theta=4m^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(1+m^2\right)^2\operatorname{sen}^2\theta=(2m)^2\ \Rightarrow\ \left(1+m^2\right)\operatorname{sen}\theta=2m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta=\frac{2m}{1+m^2}.$$

Además,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 = 1 - \frac{4m^2}{(1+m^2)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{\left(1+m^2\right)^2 - 4m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{1+2m^2+m^4-4m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{1-2m^2+m^4}{(1+m^2)^2} = \frac{\left(1-m^2\right)^2}{(1+m^2)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

donde $m = \tan\dfrac{\theta}{2}$. Esto es,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \& \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

- Ahora, ejemplifiquemos el uso de estas identidades para calcular integrales.

Ejemplo 2.8.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x + \cos x}$.

▼

$$\operatorname{sen}x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad \& \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}x + \cos x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = -\frac{\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}-1}{\tan^2\frac{x}{2}+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x} = -\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\operatorname{sen}x+\cos x} = -\int \frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}-1}\,dx.$$

Ahora, utilizando el cambio de variable $u = \tan\dfrac{x}{2}$:

$$u = \tan\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = \arctan u \;\Rightarrow\; x = 2\arctan u \;\Rightarrow\; dx = \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x+\cos x} = -\int \frac{u^2+1}{u^2-2u-1}\,\frac{2\,du}{1+u^2} = -2\int \frac{du}{u^2-2u-1}.$$

Aplicamos fracciones parciales.

$$u^2-2u-1 = \left(u^2-2u+1\right)-2 = (u-1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^2-2u-1} = \frac{1}{\left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{A}{u-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{u-1+\sqrt{2}} = \frac{A\left(u-1+\sqrt{2}\right)+B\left(u-1-\sqrt{2}\right)}{\left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A\left(u-1+\sqrt{2}\right)+B\left(u-1-\sqrt{2}\right) = (A+B)u + \left(-1+\sqrt{2}\right)A + \left(-1-\sqrt{2}\right)B \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+B=0 \quad \& \quad \left(-1+\sqrt{2}\right)A-\left(1+\sqrt{2}\right)B=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B=-A \quad \& \quad \left(-1+\sqrt{2}\right)A-\left(1+\sqrt{2}\right)B=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(-1+\sqrt{2}\right)A-\left(1+\sqrt{2}\right)(-A)=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\right]A=1 \Rightarrow 2\sqrt{2}A=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \& \quad B=-A \Rightarrow B=\frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

Luego,

$$\frac{1}{u^2-2u-1}=\frac{A}{u-1-\sqrt{2}}+\frac{B}{u-1+\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{u-1-\sqrt{2}}+\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}}{u-1+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{u-1-\sqrt{2}}-\frac{1}{u-1+\sqrt{2}}\right].$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}x+\cos x}=-2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-2u-1}=-2\int\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{u-1-\sqrt{2}}-\frac{1}{u-1+\sqrt{2}}\right]\mathrm{d}u=$$
$$=-\frac{2}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left(u-1-\sqrt{2}\right)-\ln\left(u-1+\sqrt{2}\right)\right]+K=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(u-1-\sqrt{2}\right)-\ln\left(u-1+\sqrt{2}\right)\right]+K=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(u-1+\sqrt{2}\right)-\ln\left(u-1-\sqrt{2}\right)\right]+K=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right]+K=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right]+K.$$

Esto es,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right]+K.$$

□

Ejemplo 2.8.13 *Calcular la integral* $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x-1}$.

▼ Por ser $\tan x=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x-1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-1}=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Aplicando las identidades

$$\operatorname{sen}x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad \& \quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

se obtiene:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x-1}=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}-\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int\frac{-\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}\,\mathrm{d}x.$$

Si ahora aplicamos un cambio de variable:

$$u = \tan\tfrac{x}{2} \;\Rightarrow\; \tfrac{x}{2} = \arctan u \;\Rightarrow\; x = 2\arctan u \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

con lo cual:

$$\int \frac{-\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-u^2+1}{u^2+2u-1}\left(\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\right) = \int \frac{-2u^2+2}{(u^2+2u-1)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u.$$

Ahora, fracciones parciales:

$$\frac{-2u^2+2}{(u^2+2u-1)(u^2+1)} = \frac{Au+B}{u^2+2u-1} + \frac{Cu+D}{u^2+1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -2u^2+2 = A\left(u^3+u\right) + B\left(u^2+1\right) + C\left(u^3+2u^2-u\right) + D\left(u^2+2u-1\right) =$$
$$= (A+C)u^3 + (B+2C+D)u^2 + (A-C+2D)u + (B-D).$$

Esta igualdad de polinomios sucede cuando:

$$A+C=0; \quad B+2C+D=-2; \quad A-C+2D=0 \quad \& \quad B-D=2.$$

Su solución es

$$A=1, \quad B=1, \quad C=-1 \quad \& \quad D=-1.$$

Luego,

$$\frac{-2u^2+2}{(u^2+2u-1)(u^2+1)} = \frac{Au+B}{u^2+2u-1} + \frac{Cu+D}{u^2+1} =$$
$$= \frac{u+1}{u^2+2u-1} + \frac{-u-1}{u^2+1} = \frac{u+1}{u^2+2u-1} - \frac{u+1}{u^2+1}.$$

Entonces,

$$\int \frac{-2u^2+2}{(u^2+2u-1)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u = \int \left[\frac{u+1}{u^2+2u-1} - \frac{u+1}{u^2+1}\right]\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2u+2)\,\mathrm{d}u}{u^2+2u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+2u-1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) - \arctan u + K =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{u^2+2u-1}{u^2+1}\right] - \arctan u + K.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x - 1} = \int \frac{-\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2u^2+2}{(u^2+2u-1)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{u^2+2u-1}{u^2+1}\right] - \arctan u + K =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\right] - \arctan\left(\tan\tfrac{x}{2}\right) + K =$$
$$= \ln\left[\frac{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\sec^2\frac{x}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} - \left(\tfrac{x}{2}\right) + K =$$
$$= \ln\sqrt{\left(\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1\right)\cos^2\frac{x}{2}} - \left(\frac{x}{2}\right) + K =$$

$$= \ln \sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}} - \left(\frac{x}{2}\right) + K =$$
$$= \ln \sqrt{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2} - \left(\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)} - \left(\frac{x}{2}\right) + K =$$
$$= \ln \sqrt{\operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)} - \left(\frac{x}{2}\right) + K =$$
$$= \ln \sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x} - \frac{x}{2} + K.$$

□

Ejercicios 2.8.1 *Miscelanea. Soluciones en la página* 17

1. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$
2. $\int \cos\sqrt{x-1}\,dx.$
3. $\int \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx.$
4. $\int x \arcsen x\,dx.$
5. $\int x^2 \arctan x\,dx.$
6. $\int e^{\sqrt[3]{x+2}}\,dx.$
7. $\int x^2 \operatorname{arcsec} x\,dx.$
8. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx.$
9. $\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{x+1}\,dx.$
10. $\int \frac{2x + 3\sqrt{x+1}}{2x - 3\sqrt{x+1}}\,dx.$
11. $\int \frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2}\,dx.$
12. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}.$
13. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + \tan x}\,dx.$
14. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x + \cos x}\,dx.$
15. $\int \frac{2e^{2x}}{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}\,dx.$
16. $\int x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)dx.$
17. $\int x \arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx.$
18. $\int \frac{4e^{2x}}{e^{4x} - 1}\,dx.$
19. $\int \frac{\cos x}{5 + 4\cos x}\,dx.$
20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}.$
21. $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx.$
22. $\int \frac{2\cos x - 5\operatorname{sen} x}{3\cos x + 4\operatorname{sen} x}\,dx.$

Ejercicios 2.8.1 *Miscelanea.* *Preguntas, página* 16

1. $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+C.$
2. $2\sqrt{x-1}\operatorname{sen}\sqrt{x-1}+2\cos\sqrt{x-1}+C.$
3. $-3\left(\sqrt[3]{x^2}-2\right)\cos\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x^2}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}+C.$
4. $\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C.$
5. $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)+C.$
6. $3\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}-2\sqrt[3]{x+2}+2\right]e^{\sqrt[3]{x+2}}+C.$
7. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arcsec}x-\frac{1}{6}\left[x\sqrt{x^2-1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]+C.$
8. $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$
9. $\frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)^2+\ln\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^4}{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}}\right]+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x^{\frac{1}{3}}-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$
10. $\left(\sqrt{x+1}+3\right)^2+\frac{3}{5}\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)^{16}}{2\sqrt{x+1}+1}\right]+K.$
11. $\ln\left[\frac{C(\operatorname{sen}x-1)}{\operatorname{sen}x+2}\right].$
12. $\ln\left[\frac{C\,(e^x-2)}{e^x-1}\right].$
13. $\ln\left[\frac{C\,\tan x}{\tan x+1}\right].$
14. $\ln\left(1+\sec^2 x\right)-2\arctan(\cos x)+K.$
15. $\ln\left[\frac{K\,(e^x-1)}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right]+\arctan\left(e^x\right).$
16. $\frac{1}{2}x^2\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}(x+1)-\ln\sqrt{(x+1)^2+1}+C.$
17. $\frac{1}{2}x^2\arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+1}-\frac{1}{2}\arctan\left(x^2+1\right)+C.$
18. $\ln\left[\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]+K.$
19. $\frac{1}{4}x-\frac{5}{6}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+K.$
20. $\ln\left[K\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right].$
21. $-x-\frac{4}{\tan\frac{x}{2}+1}+K.$
22. $\frac{23}{25}\ln[-3\cos x-4\operatorname{sen}x]-\frac{14}{25}x+K.$

CAPÍTULO

3

Aplicaciones de la integral

[1]

3.1 Introducción

En este capítulo veremos diferentes aplicaciones de la integral definida; entre ellas, el cálculo del área de figuras planas y el volumen de un sólido; vamos a enfocarnos en el cálculo del volumen de un sólido de revolución utilizando para esto diferentes métodos (método de las Arandelas y método de los Cascarones Cilíndricos); el cálculo de la longitud de un arco de curva; el cálculo del trabajo realizado por una fuerza; el cálculo de la fuerza y presión ejercida por un fluido y, finalmente, el cálculo del centro de masa tanto para un sistema unidimensional como para un sistema bidimensional.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

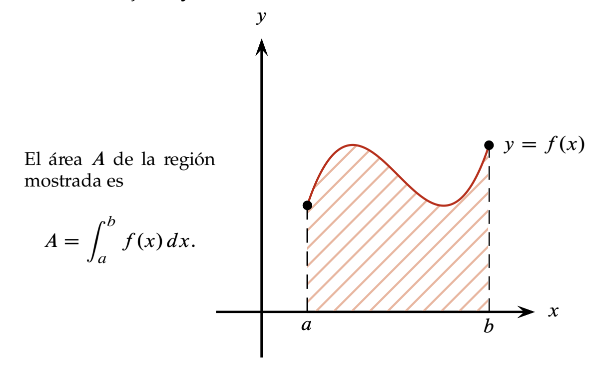
CAPÍTULO

3

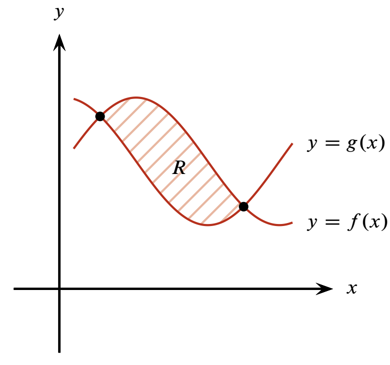
Aplicaciones

3.2 Área de una región plana

La integral definida de una función $f(x) \geq 0$ y continua en un intervalo $[a, b]$ mide el área de la región bajo la gráfica de $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

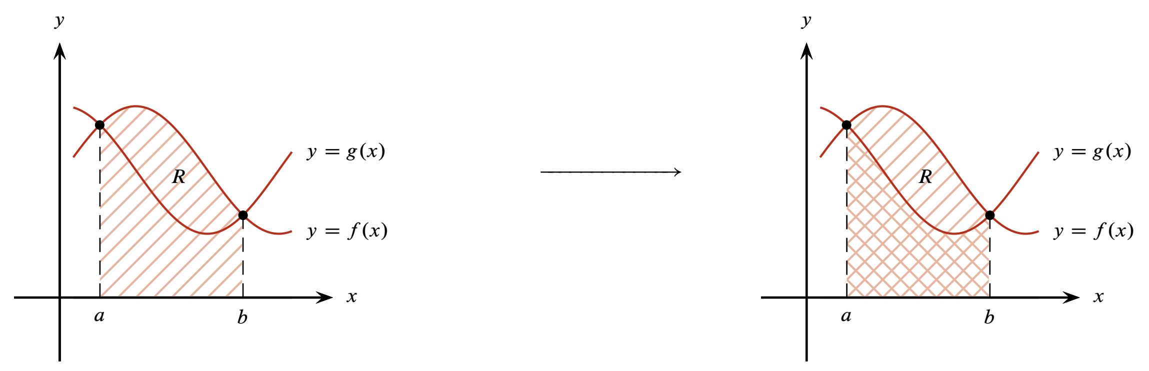


Se explica a continuación cómo hallar el área de una región comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas y no negativas, digamos $f(x)$ & $g(x)$ mostradas en la siguiente figura:



1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Usando la aditividad del área podemos resolver este problema. En primer lugar debemos determinar los puntos donde las curvas $y = f(x)$ & $y = g(x)$ se intersecan; supongamos que las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ son $x = a$ & $x = b$, las cuales definen un intervalo cerrado $[a, b]$ donde suponemos que $f(x) \geq g(x)$.
Entonces la región bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$ & $x = b$, se puede descomponer como la unión de dos regiones que no se traslapan, una de ellas es R [la región entre las curvas $y = f(x)$ & $y = g(x)$] y la otra es la región bajo $y = g(x)$, sobre el eje x y entre las rectas verticales $x = a$ & $x = b$:



En términos de áreas, esta descomposición se escribe así:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = A(R) + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Desplazamos la integral de $g(x)$ al otro lado de la igualdad:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

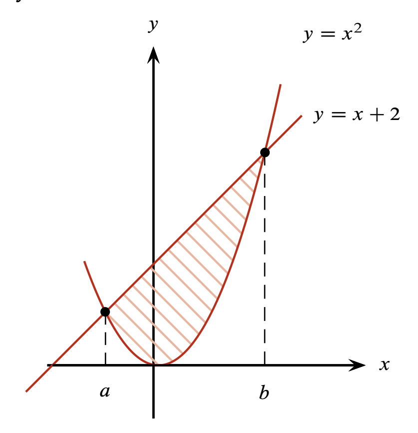
o también:

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

En esta fórmula hay que tener cuidado con el orden en que se escriben las funciones en el integrando; siempre se resta la función menor en el intervalo $[a, b]$, en este caso es $g(x)$ el sustraendo. De esta forma, obtenemos un resultado positivo.

Ejemplo 3.2.1 *Calcular el área de la región contenida entre las gráficas de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.*

▼ Siempre es recomendable, en este y todos los problemas similares, comenzar haciendo las gráficas de las funciones que acotan la región cuya área deseamos calcular.



Se puede ver en la figura que esta región queda debajo de la recta $y = x + 2$ y sobre la parábola $y = x^2$; una región de este tipo se llama sector parabólico. En la gráfica se aprecia que el área de la región es

$$\text{Área} = \int_a^b (x+2)dx - \int_a^b x^2 dx = \int_a^b (x+2-x^2)dx,$$

pues la recta está por encima de la parábola. Sin embargo necesitamos encontrar los límites de integración a, b, lo que haremos resolviendo la ecuación:

$$f(x) = g(x) \ \Rightarrow \ x + 2 = x^2,$$

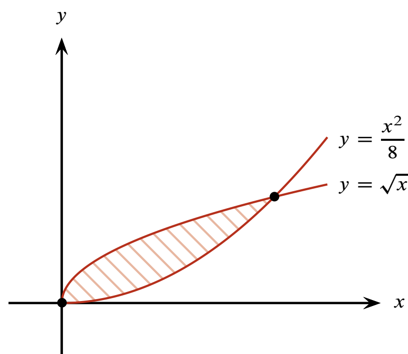
que podemos expresar como $x^2 - x - 2 = 0$, o bien como $(x-2)(x+1) = 0$. Las soluciones son entonces $x = 2, x = -1$. Por consiguiente, el área se calcula con la integral:

$$\begin{aligned}\text{Área} = \int_{-1}^{2} [x + 2 - x^2]\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \\ &= \frac{(2)^2}{2} + 2(2) - \frac{(2)^3}{3} - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4.5\ \mathrm{u}^2.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.2 *Determinar el área de la región comprendida entre las curvas* $y = \dfrac{x^2}{8}$ & $y = \sqrt{x}$, *con* $x \geq 0$.

▼ En las gráficas de las funciones que rodean a la region podemos ver que $y = \sqrt{x}$ es el borde superior y que $y = \dfrac{x^2}{8}$ es el inferior.



Buscamos los límites de integración resolviendo la ecuación:

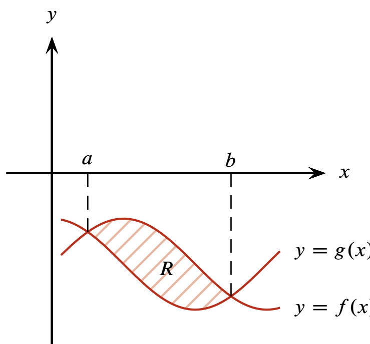
$$\begin{aligned}&f(x) = g(x) \ \Rightarrow \ \sqrt{x} = \frac{x^2}{8} \ \Rightarrow \ \frac{x^4}{64} = x \ \Rightarrow \ x^4 = 64x \ \Rightarrow \ x^4 - 64x = 0 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ x(x^3 - 64) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x^3 - 64 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x = \sqrt[3]{64} = 4.\end{aligned}$$

Vemos de este modo que los extremos de integración son 0 y 4, así que el área se calcula como

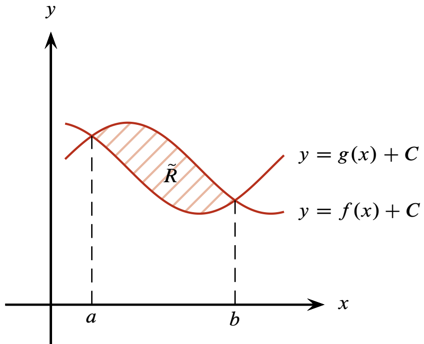
$$\begin{aligned}A(R) &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \\ &= \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}(4)^3 = \frac{16}{3} - \frac{64}{24} = \frac{8}{3}\ \mathrm{u}^2.\end{aligned}$$

□

En los ejemplos previos hemos utilizado funciones cuyas gráficas están por encima del eje x. Esta no es una condición importante en realidad, lo único que se necesita para aplicar la fórmula (3.1) es calcular los límites de integración y considerar la posición de las gráficas de $f(x)$ & $g(x)$, cuál está arriba y cuál abajo. Para que el lector aprecie esta observación, supongamos que las gráficas de $f(x)$ & $g(x)$ se encuentran debajo el eje x:



Si trasladamos verticalmente las gráficas de ambas funciones, sumando en ambas una constante C suficientemente grande, tendríamos:

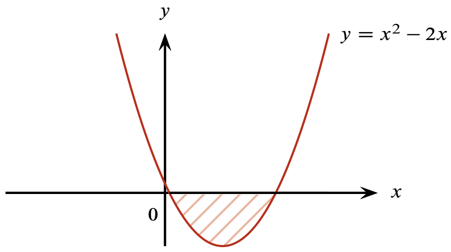


La región R se trasladó íntegramente a $\tilde{R}$, sin deformarse y así su área no cambió. Además,

$$A(R) = A(\tilde{R}) = \int_a^b [(f(x) + \cancel{C}) - (g(x) + \cancel{C})]\, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 3.2.3 *Determine el área de la región limitada por el eje x y la parábola $y = x^2 - 2x$.*

▼ La gráfica de la parábola se presenta en la figura, la región está debajo del eje x y sobre la gráfica de $y = x^2 - 2x$.



El eje x se puede describir como la gráfica de $y = 0$, así que en el integrando tendremos $[0 - (x^2 - 2x)]\, \mathrm{d}x$ y los limites de integración se obtienen resolviendo:

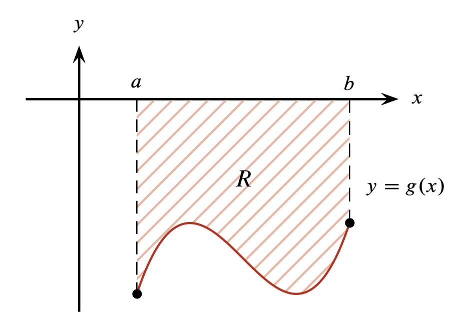
$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \& \quad x = 2.$$

Con esta información, el área que deseamos determinar es

$$A(R) = \int_0^2 [0 - (x^2 - 2x)]\ \mathrm{d}x = \int_0^2 (2x - x^2)\ \mathrm{d}x = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 =$$
$$= 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ \mathrm{u}^2.$$

□

- Generalizando, para cualquier función $y = g(x) \le 0$ en un intervalo $[a, b]$, el área bajo el eje x y sobre la gráfica de $y = g(x)$ será



El área $A(R) \ge 0$ de la región entre las curvas $y = 0$ & $y = g(x)$ se calcula como sigue:

$$A(R) = \int_a^b [0 - g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b -g(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$ Curva superior − curva inferior.

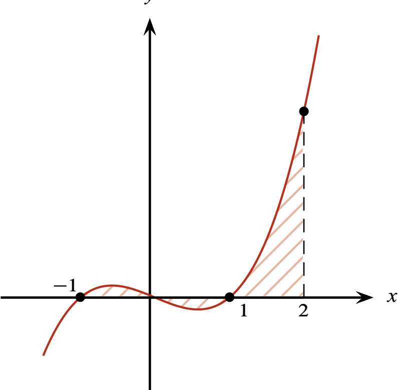
Esto se puede interpretar también como

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = -A(R),$$

de modo que la integral de la función mide un área con signo, tomando como área positiva cuando la gráfica del integrando está sobre el eje x y como área negativa cuando se encuentra bajo el eje x.

Ejemplo 3.2.4 *Interpretar la integral* $\int_{-1}^{2} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$ *como un área con signo.*

▼ La gráfica de $y = x^3 - x$ se presenta en la siguiente figura:



Como se trata de una función impar, la gráfica es simétrica con respecto al origen. Observe que la parte de la curva en $[-1, 0]$ es simétrica con la parte en $[0, 1]$, así que el área que encierran junto con el eje x ambos tramos son iguales en magnitud, pero de signo contrario:

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 (x^3 - x)\ \mathrm{d}x.$$

Tenemos entonces:

$$\int_{-1}^{1}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Concluimos que:

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x = \int_{1}^{2}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x.$$

Comprobamos este último resultado, calculando ambas integrales:

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4};$$
$$\int_{1}^{2}(x^3 - x)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right) = 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

□

Ejemplo 3.2.5 *Calcular el área de la región encerrada entre la gráfica de la función $y = x^3 - x$ & el eje x, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.*

▼ No hay necesidad de graficar esta vez, pues la gráfica de la función es la misma del ejemplo anterior. Lo que cambia en el cálculo y resultado que haremos ahora se debe a que buscamos un área, no la integral definida solamente; en el caso presente el área definida en el intervalo $[-1, 0]$ se suma al área definida en el intervalo $[0, 1]$.

Dicho lo anterior, calculamos el área solicitada integrando en tres tramos, como sigue:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0}[(x^3 - x) - 0]\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1}[0 - (x^3 - x)]\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{2}[(x^3 - x) - 0]\ \mathrm{d}x.$$

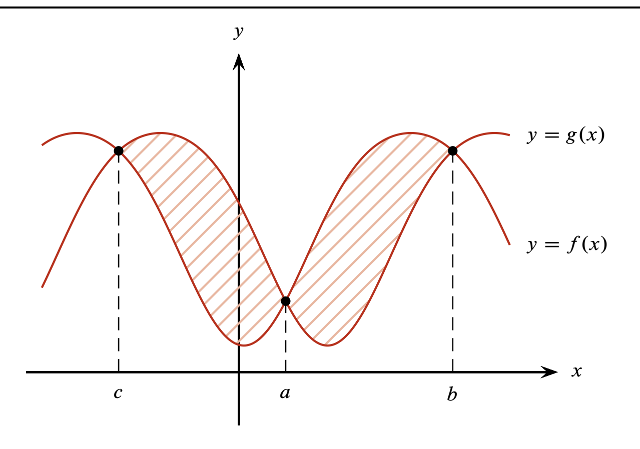
El 0 en los integrandos de la fórmula anterior representa al eje x; cuando la función $y = x^3 - x$ es > 0, restamos 0, y cuando $y = x^3 - x < 0$, entonces al 0 le restamos la función. Simplificando y haciendo los cálculos en la fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} = \\ &= -\left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2}\right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{16}{4} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

Este resultado difiere del ejemplo anterior en que las áreas de las regiones de -1 a 0 y de 0 a 1 en vez de cancelarse se sumaron; observe que ambas son iguales a $\frac{1}{4}$, por la simetría de la función.

□

Podemos generalizar la idea del ejemplo anterior como sigue: si las funciones $y = f(x)$ & $y = g(x)$ tienen más de dos intersecciones, entonces el área limitada por sus gráficas se obtiene integrando sobre cada intervalo, entre dos cruces de las gráficas, bien $f(x) - g(x)$ o bien $g(x) - f(x)$, dependiendo de cuál de ellas queda por arriba y cuál por debajo en dicho intervalo. Por ejemplo, en la siguiente gráfica:



El área sombreada de la región es

$$A(R) = \int_c^a [g(x) - f(x)]\, \mathrm{d}x + \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

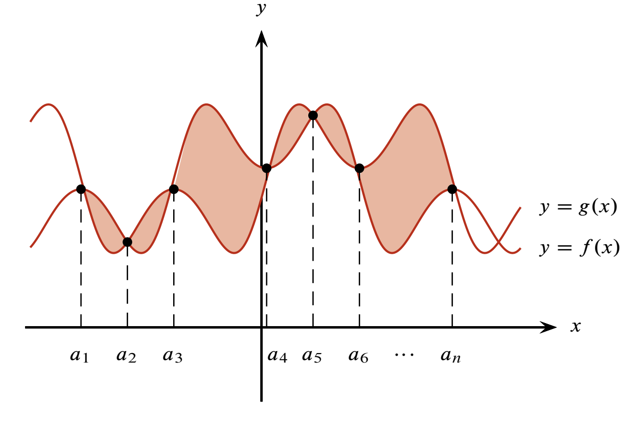
Por comodidad, para abreviar en la escritura de la fórmula, podemos usar la función valor absoluto. Recordemos que:

$$|\,u\,| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0; \\ -u, & \text{si } u < 0; \end{cases}$$

así que al aplicar esta función a la diferencia $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} |\,f(x) - g(x)\,| &= \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{si } f(x) - g(x) \geq 0; \\ -[f(x) - g(x)]\,, & \text{si } f(x) - g(x) < 0; \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{si } f(x) \geq g(x); \\ g(x) - f(x), & \text{si } f(x) < g(x). \end{cases} \end{aligned}$$

La fórmula para el caso donde $f(x)$, $g(x)$ tengan varias intersecciones $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ es



$$\text{Área}(R) = \int_{a_1}^{a_n} |\,f(x) - g(x)\,|\, \mathrm{d}x.$$

La fórmula se ve muy simple, pero la integral del lado derecho se debe partir en una suma de integrales:

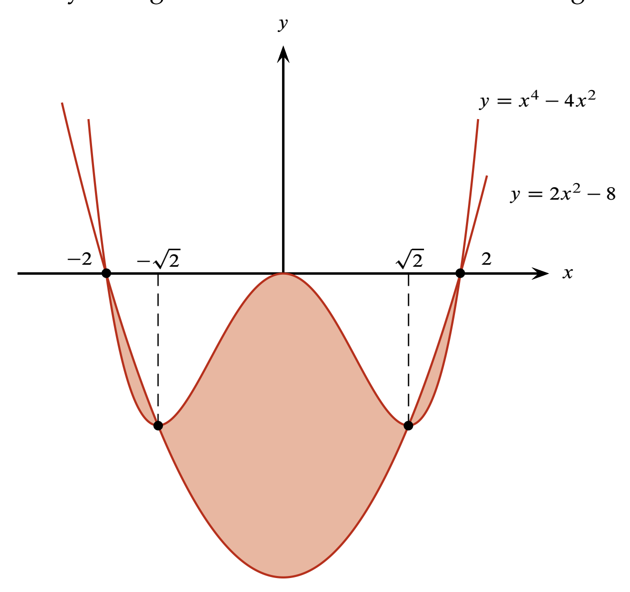
$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n},$$

con el integrando $\pm[f(x) - g(x)]$, con el signo apropiado.

Ejemplo 3.2.6 *Determinar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones*

$$f(x) = x^4 - 4x^2 \quad \& \quad g(x) = 2x^2 - 8.$$

▼ La gráfica de ambas funciones y las regiones entre ellas se muestra en la figura.



Las intersecciones de las gráficas se determinan resolviendo $f(x) = g(x)$, esto es,

$$x^4 - 4x^2 = 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad x^2 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{o bien} \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Los correspondientes valores de las ordenadas son 0 para $x = \pm 2$ y -4 cuando $x = \pm\sqrt{2}$, es decir, los puntos de intersección de las gráficas son $(-2, 0)$, $(-\sqrt{2}, -4)$, $(\sqrt{2}, -4)$ y $(2, 0)$.

En los intervalos $-2 \le x \le -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \le x \le 2$, la gráfica de $f(x)$ queda por debajo de la de $g(x)$, y en el intervalo $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ sucede lo contrario.

En consecuencia, el área se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} |\, f(x) - g(x)\, |\, dx =$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx =$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \left[(2x^2 - 8) - (x^4 - 4x^2)\right] dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[(x^4 - 4x^2) - (2x^2 - 8)\right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left[(2x^2 - 8) - (x^4 - 4x^2)\right] dx =$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} [-x^4 + 6x^2 - 8]\, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [x^4 - 6x^2 + 8]\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} [-x^4 + 6x^2 - 8]\, dx =$$
$$= \left(-\frac{x^5}{5} + 2x^3 - 8x\right)\Bigg|_{-2}^{-\sqrt{2}} + \left(\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 8x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \left(-\frac{x^5}{5} + 2x^3 - 8x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} =$$
$$= \left[-\frac{(-\sqrt{2})^5}{5} + 2(-\sqrt{2})^3 - 8(-\sqrt{2})\right] - \left[-\frac{(-2)^5}{5} + 2(-2)^3 - 8(-2)\right] + \left[\frac{(\sqrt{2})^5}{5} - 2(\sqrt{2})^3 + 8\sqrt{2}\right] -$$
$$- \left[\frac{(-\sqrt{2})^5}{5} - 2(-\sqrt{2})^3 + 8(-\sqrt{2})\right] + \left[-\frac{2^5}{5} + 2(2)^3 - 8(2)\right] - \left[-\frac{(\sqrt{2})^5}{5} + 2(\sqrt{2})^3 - 8\sqrt{2}\right] =$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{5} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right] - \left[\frac{32}{5} - \cancel{16} + \cancel{16}\right] + \left[\frac{4\sqrt{2}}{5} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right] - \left[-\frac{4\sqrt{2}}{5} + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\right] +$$

$$+ \left[-\frac{32}{5} + \cancel{16} - \cancel{16}\right] - \left[-\frac{4\sqrt{2}}{5} + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\right] = \frac{16\sqrt{2}}{5} + 16\sqrt{2} - \frac{64}{5} =$$

$$= \frac{96\sqrt{2}}{5} - \frac{64}{5}\ \mathrm{u}^2.$$

Observe que los cálculos anteriores pudieron haberse simplificado de haber usado la paridad y simetría de las gráficas. En realidad habría bastado con calcular

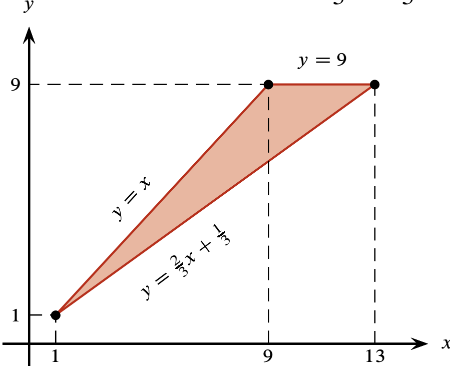
$$\text{Área} = 2\int_0^{\sqrt{2}} [x^4 - 6x^2 + 8]\,\mathrm{d}x + 2\int_{\sqrt{2}}^{2} [-x^4 + 6x^2 - 8]\,\mathrm{d}x,$$

para obtener el mismo resultado.

□

Ejemplo 3.2.7 *Considerar la región delimitada por las gráficas de $y = x$, $y = 9$ & $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Calcular el área de la región descrita integrando primeramente sobre el eje x; posteriormente realizar el cálculo del área integrando sobre el eje y.*

▼ La región delimitada por la gráfica de $y = x$, $y = 9$ & $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ se muestra en la siguiente figura:



El área de la región integrando sobre el eje x es

$$A(R) = \int_1^9 \left[x - \left(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}\right)\right]\mathrm{d}x + \int_9^{13} + \left[9 - \left(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^9 \left(x - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}x + \int_9^{13} + \left(9 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^9 \left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3}\right)\mathrm{d}x + \int_9^{13} + \left(\tfrac{26}{3} - \tfrac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x =$$

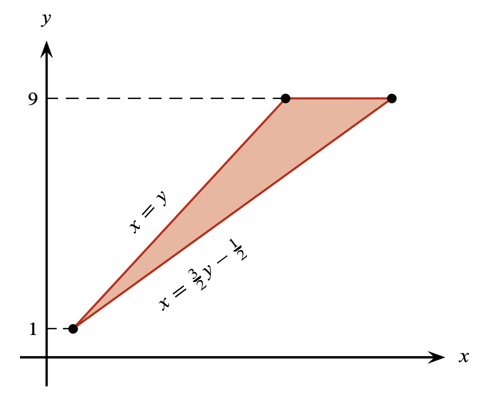
$$= \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3}\right)\Big|_1^9 + \left(\frac{26}{3}x - \frac{x^2}{3}\right)\Big|_9^{13} =$$

$$= \left(\frac{9^2}{6} - \frac{9}{3}\right) - \left(\frac{1^2}{6} - \frac{1}{3}\right) + \left[\frac{(26)(13)}{3}x - \frac{(13)^2}{3}\right] - \left[\frac{(26)(9)}{3} - \frac{9^2}{3}\right] =$$

$$= \frac{81}{6} - 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{338}{3} - \frac{169}{3} - 78 + \frac{81}{3} =$$

$$= \frac{80}{6} + \frac{251}{3} - 81 = \frac{80 + 502 - 486}{6} = 16\ \mathrm{u}^2.$$

Para calcular el área de la región al integrar sobre el eje y, se debe encontrar la inversa de $y = x$ & $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$. Respectivamente, $x = y$ & $x = \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{2}$.



El área de la región al integrar sobre el eje y es

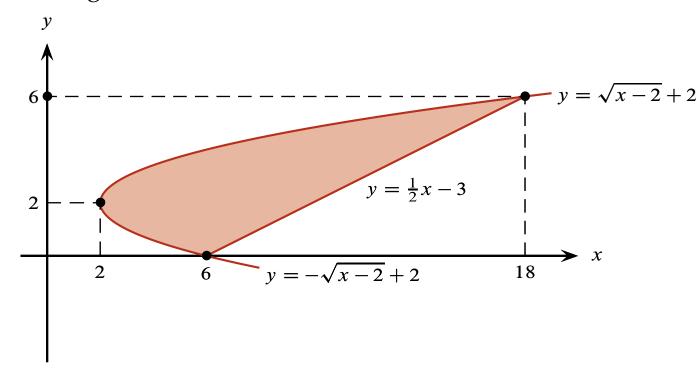
$$A(R) = \int_1^9 \left[\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right) - y\right] \mathrm{d}y = \int_1^9 \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}y = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y}{2}\right)\Bigg|_1^9 = \left(\frac{9^2}{4} - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{9}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 20 - 4 = 16 \text{ u}^2.$$

□

Para el cálculo del área de una región resulta más sencillo, en algunos casos, integrar sobre uno de los dos ejes del plano cartesiano. En el ejemplo anterior, el cálculo del área de la región al integrar sobre el eje y resultó más sencillo.

Ejemplo 3.2.8 *Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = -\sqrt{x-2} + 2$ & $h(x) = \dfrac{x}{2} - 3$. Obtener el área de la región delimitada por sus gráficas.*

▼ Se muestra a continuación la región descrita:

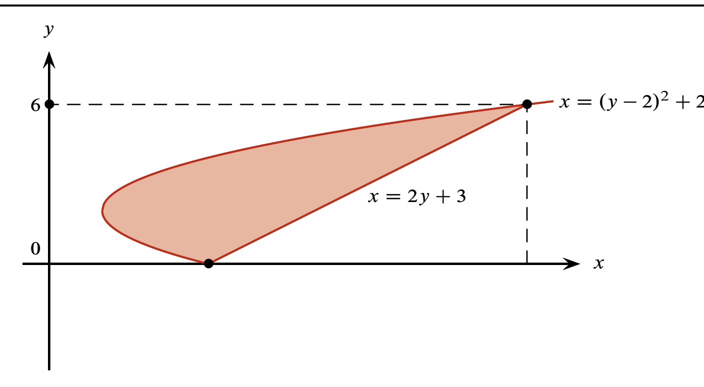


Si se integra sobre el eje x, el área de la región es

$$A(R) = \int_2^6 \left[\left(\sqrt{x-2} + 2\right) - \left(-\sqrt{x-2} + 2\right)\right] \mathrm{d}x + \int_6^{18} \left[\left(\sqrt{x-2} + 2\right) - \left(\tfrac{1}{2}x - 3\right)\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \int_2^6 \left(2\sqrt{x-2}\right) \mathrm{d}x + \int_6^{18} \left(\sqrt{x-2} - \tfrac{1}{2}x + 5\right) \mathrm{d}x = \frac{32}{3} + \frac{76}{3} = \frac{108}{3} = 36 \text{ u}^2.$$

Resulta más sencillo si integra con respecto a y. Las funciones x de y que delimitan la región son

$$x = (y-2)^2 + 2 \;\&\; x = 2y + 3.$$



Si se integra sobre el eje y, el área de la región es

$$A(R) = \int_0^6 \left[(2y+3) - \left((y-2)^2 + 2\right)\right] \mathrm{d}y = \int_0^6 \left(-y^2 + 6y - 3\right) \mathrm{d}y = \left(-\frac{y^3}{3} + 3y^2 - 3y\right)\Big|_0^6 = 36 \text{ u}^2.$$

□

Ejercicios 3.2.1 *Áreas.* *Soluciones en la página 13*

1. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones
$$f(x) = 4x(1-x) \;\&\; g(x) = 4x - 4.$$
2. Determinar el área de la región delimitada por la gráfica de las función $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$ y el eje x.
3. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ & $g(x) = x$.
4. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = |\,x\,|$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
5. Calcular el área de las regiones delimitadas por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 4x$ & $g(x) = -3x^2$.
6. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ & $h(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
7. Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = e^x$ y las rectas $y = 10$ & $x = 0$.
8. Calcular el área de la región delimitada por la las curvas $y = e^x$ & $y = e^{-x}$ y la recta $y = 4$.
9. Encontrar el área de la región delimitada por la curva $y = xe^{-x^2}$ y las rectas $y = 0$ & $x = 1$.
10. Realice un bosquejo de la región delimitada por las curvas $y = \cos x$ & $y = 2 - \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Calcular el área de dicha región.
11. Sea R_1 la región del plano entre las curvas $y = |x^2 - 2x|$ & $y = 3$. Calcular el área de R_1.
12. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-2x}$ y la recta $x = \ln 4$.
13. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $y = \ln(x-1)$ y las rectas $y = x - 2$ & $x = 3$.
14. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = \cos x$, $g(x) = e^x$ & la recta $x = \pi$.
15. Calcular el área de la región del plano limitado por el eje x, y las curvas $y = (x-1)^2$, $y = (x-3)^2$.
16. Calcular el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \ln x$, $y = e^x$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$.

17. Encontrar el área limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ & $y = \cos x$ en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

18. Calcular el área de la región del plano limitada por las gráficas de $y = x^2 + 4$, $y = -2x + 3$ & $y = 6x - 5$.

19. Determine el área de la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = x^2 - 2$, $x = 1$, $x = -1$.

20. Considerar la región delimitada por las curvas $x = (y-1)^2$ & $x = 2y$. Determinar el área de la región integrando sobre el eje y y sobre el eje x.

Ejercicios 3.2.1 *Áreas.* *Preguntas, página 11*

1. $\dfrac{16}{3}$ u^2.
2. $\dfrac{3}{2}$ u^2.
3. $\dfrac{1}{2}$ u^2.
4. $\dfrac{4}{3}$ u^2.
5. $\dfrac{131}{4}$ u^2.
6. $\dfrac{3}{4}$ u^2.
7. $10\ln(10) - 9 \approx 14.0259$ u^2.
8. $8\ln(4) - 6 \approx 5.0904$ u^2.
9. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e-1}{e}\right) \approx 0.3161$ u^2.
10. 4π u^2.
11. 8 u^2.
12. $\dfrac{81}{32}$ u^2.
13. $\left(\dfrac{3}{2} - \ln 4\right)$ u^2.
14. $(-1 + e^{\pi})$ u^2.
15. $\dfrac{2}{3}$ u^2.
16. $[1 + e(e-1) - \ln 4]$ u^2.
17. $2\sqrt{2}$ u^2.
18. $\dfrac{16}{3}$ u^2.
19. $\left(\dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{e} + e\right)$ u^2.
20. $\dfrac{32}{3}$ u^2.

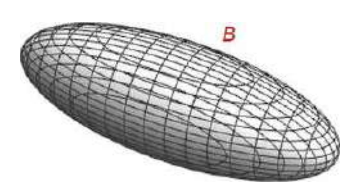
CAPÍTULO

3

Aplicaciones de la integral

3.1 Volumen de sólidos

Lo que dio origen a la integral en el cálculo de áreas (hacer una partición de un intervalo, obtener aproximación del área, refinar la partición, tomar límites, entre otros) puede ahora aplicarse para calcular el volumen de un sólido, teniendo en cuenta ciertas suposiciones generales. Imaginemos un sólido B en el espacio cuyo volumen $V(B)$ deseamos calcular.



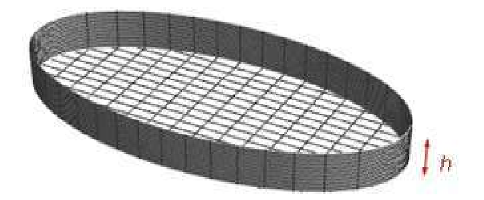
Este volumen es una medida de la extensión del sólido, y al igual que el área satisface las propiedades:

1. $V(B) \geq 0$.

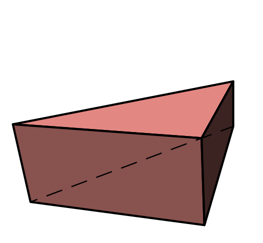
2. $V(B_1 \bigcup B_2) = V(B_1) + V(B_2)$, siempre que $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$.

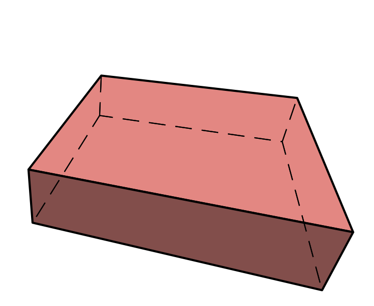
Un cilindro es un sólido que tiene una cara plana que llamaremos base y altura constante h. Además, La base tiene exactamente la misma forma que la tapa superior y que cualquier corte o sección transversal paralela a la base.

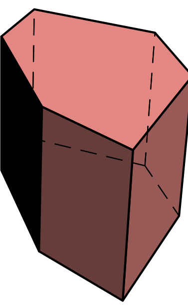
canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017



El sólido que usualmente llamamos cilindro es en realidad un cilindro circular recto. El cilindro como lo acabamos de definir puede tener base de cualquier forma R, en particular cuando R es un polígono el correspondiente cilindro es un prisma:







Una vez aclarado lo que entendemos por cilindro, enunciamos la propiedad de normalización del volumen:

3. Si B es un cilindro cuya base es la figura plana R y con altura h, entonces su volumen es

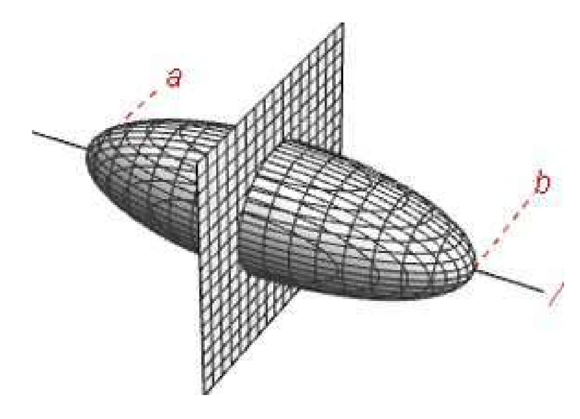
$$V(B) = A(R) \cdot h,$$

es decir, es el producto del área de su base por su altura.

Observación. La propiedad anterior concuerda con las ideas previamente adquiridas en geometría, por ejemplo, si el cilindro es un prisma, su volumen se calcula exactamente como el área de la base por la altura.

Para calcular el volumen de sólidos que no necesariamente sean cilindros utilizamos un razonamiento parecido al que aplicamos para el cálculo de áreas, basado en rectángulos; pero ahora calcularemos basándonos en el volumen de cilindros, esto es:

- Supongamos que para el sólido B cuyo volumen queremos calcular hay una línea recta ℓ de tal forma que podemos hacer cortes del sólido B con planos perpendiculares a ℓ, como sucede en las máquinas que se usan para rebanar alimentos.

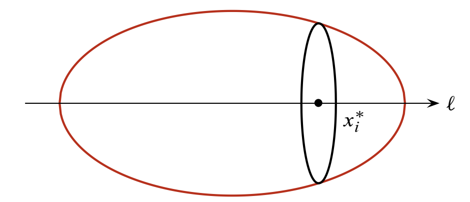


Para que nuestro argumento avance, tenemos que suponer algo más: que la línea ℓ está graduada o tiene escala, de manera que podemos hacer un corte perpendicular a ℓ a cualquier distancia x dentro de cierto rango $[a, b]$.

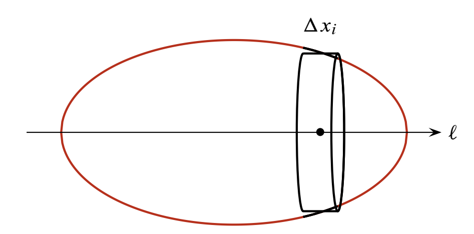
- Suponemos también que ese corte a la distancia x es una cara plana, digamos $R(x)$, cuya área debe ser posible calcular; denotemos dicha área por

$$A(x) = \text{área de } R(x).$$

- Con los anteriores supuestos, podemos calcular el volumen de un sólido B por medio de los pasos siguientes:
  - ⋆ Tomamos una partición del intervalo $[a, b]$, esto es, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
  - ⋆ Para cada subintervalo de la partición $[x_{i-1}, x_i]$ tomamos un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.
  - ⋆ Hacemos un corte perpendicular a la línea ℓ que pase por el punto x_i^*. Este corte determina una región plana del sólido cuya área $A(x_i^*)$ se calcula.

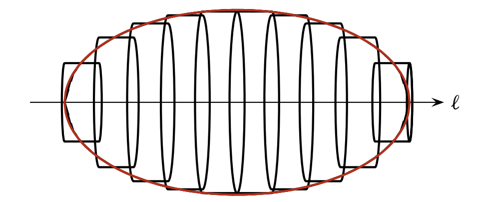


  - ⋆ Se construye un cilindro recto cuya área de la base es $A(x_i^*)$ y la altura es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



  - ⋆ Obtenemos así, una aproximación al volumen del sólido mediante la fórmula

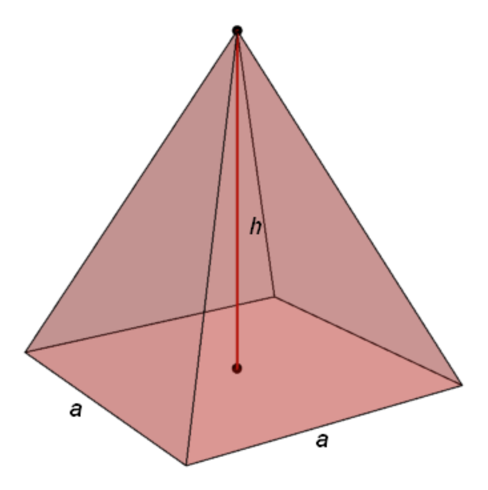
$$\text{Vol}(B) \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i,$$



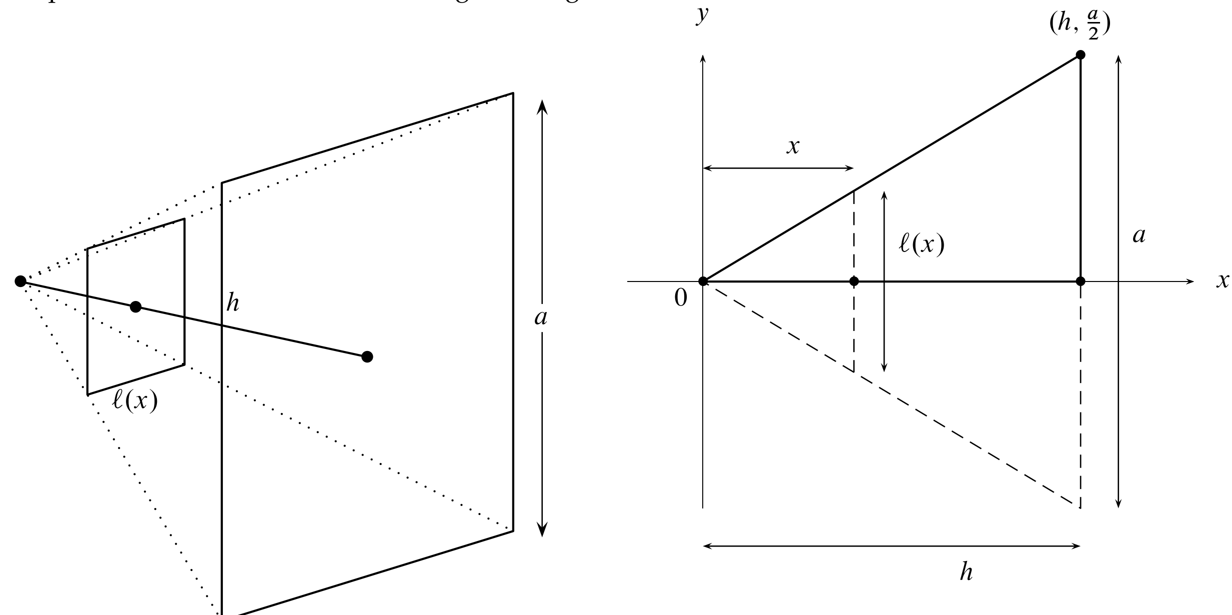
  - ⋆ La aproximación será mejor a medida que tomamos particiones más finas, con n tendiendo a ∞ y con Δx_i tendiendo a cero. El método así esbozado producirá, en el límite, el volumen del sólido:

$$\text{Vol}(B) = \int_a^b A(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 3.1.1 *Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada con lado a & altura h.*



▼ Pongamos en el eje x la línea que une los centros de los cuadrados que forman las secciones transversales de la pirámide, como se muestra en la siguiente figura:



De esta forma el vértice de las caras triangulares de la pirámide coincide con el origen, y los cortes con planos perpendiculares al eje son todos cuadrados; hay un cuadrado para cada x desde 0 hasta h. El lado de esos cuadrados crece linealmente, desde 0 cuando $x = 0$ hasta a cuando $x = h$; por tanto, el lado $\ell(x)$ del cuadrado en el corte por x es $\ell(x) = \dfrac{ax}{h}$, para $0 \leq x \leq h$. El área correspondiente a dicho cuadrado será entonces:

$$A(x) = [\ell(x)]^2 = \left(\frac{ax}{h}\right)^2 = \frac{a^2x^2}{h^2}.$$

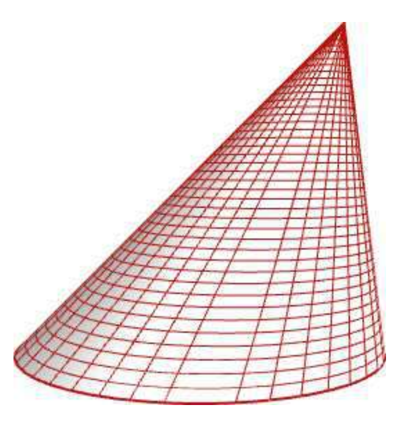
De acuerdo con la discusión previa, el volumen de la pirámide es

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{a^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{a^2h}{3},$$

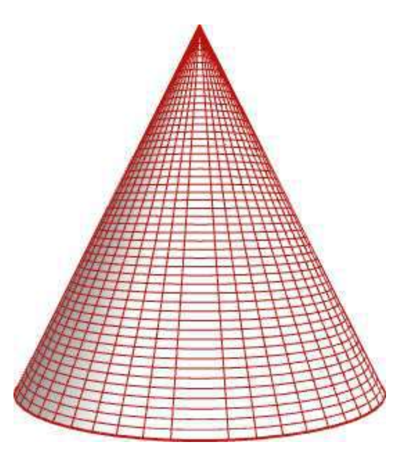
es decir, el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base por la altura. Vale la pena comentar que esta fórmula ya era conocida por culturas antiguas, como la egipcia.

□

- Generalizando el ejemplo anterior, si R es una región plana acotada, llamamos cono sobre R de altura h al sólido que resulta de unir todos los puntos de la región con un punto P del espacio, situado a una distancia h del plano que contiene a la región.



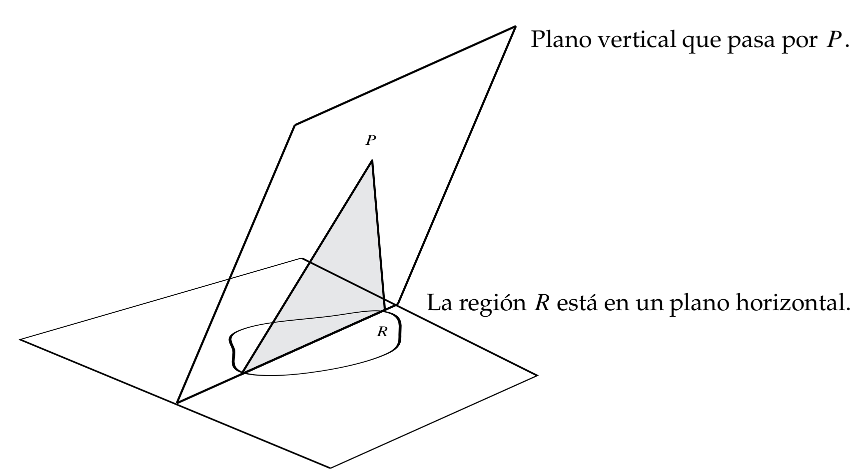
Por supuesto, el cono circular recto (que es a lo que comúnmente llamamos cono) es un caso particular de lo que acabamos de definir.



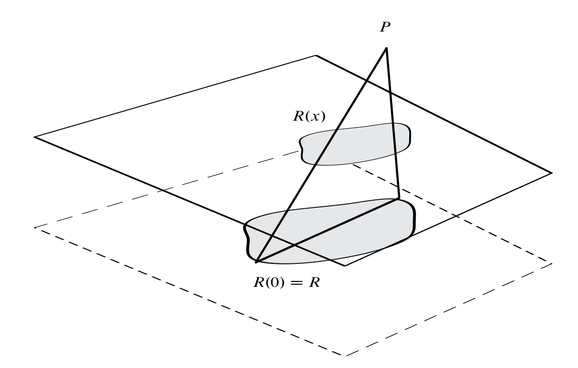
Ejemplo 3.1.2 *Demostrar que el volumen de cualquier cono sobre una región R de altura h es*

$$Vol = \frac{1}{3}\text{área}(R)\cdot h$$

▼ Es necesario hacer la siguiente observación: si se interseca el cono sobre la región R de altura h con un plano perpendicular a la base que pase por el vértice P el resultado será siempre un triángulo de altura h con vértice P (veáse figura):



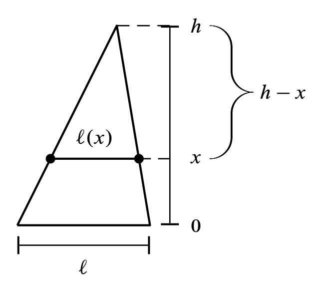
Por otro lado, las intersecciones del sólido que estamos considerando con planos paralelos al plano que contiene a la región R son todas semejantes a la región R:



Es decir, el corte a la altura x, con $0 \leq x \leq h$, es una región $R(x)$ semejante a la base $R(0)$, mientras que $R(h)$ degenera en el punto P.

Ahora bien, ¿cómo cambia el área $A(x)$ de la región $R(x)$?

Llamamos cuerda a cualquier segmento de recta que une dos puntos de la frontera de R. Supongamos que una cuerda tiene longitud ℓ.



Queremos calcular la longitud de la cuerda asociada, $\ell(x)$, a la altura x.
De la figura anterior, por semejanza de triángulos:

$$\frac{\ell(x)}{\ell} = \frac{h - x}{h} = 1 - \frac{x}{h} \Rightarrow \ell(x) = \ell\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Por lo tanto:

- Cualquier cuerda ℓ en la base disminuye con la altura a razón de $\ell(x) = \ell\left(1 - \dfrac{x}{h}\right)$.
- Las secciones horizontales del cono $R(x)$ son semejantes a la base $R(0)$.

Una última observación: si las dimensiones lineales disminuyen como $\left(1-\dfrac{x}{h}\right)$ a la altura x, entonces el área de $R(x)$ debe disminuir como su cuadrado, es decir:

$$A(x) = A(R)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2,$$

puesto que las áreas varían como el cuadrado de las dimensiones lineales.
Como constatamos, el volumen del cono sobre R de altura h es

$$V = \int_0^h A(R)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \, dx = A(R)\int_0^h \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \, dx =$$

$$\boxed{u = 1-\frac{x}{h} \Rightarrow du = -\frac{1}{h}\, dx \Rightarrow dx = -h\, du.}$$

$$= A(R)\int_1^0 u^2(-h \; du) = A(R)\int_0^1 hu^2 \; du =$$

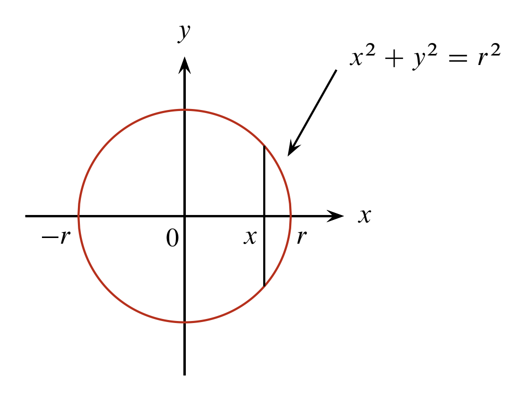
$$= A(R)\cdot h \cdot \frac{u^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{A(R)\cdot h}{3}.$$

Esto es lo que se deseaba probar.

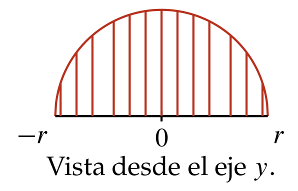
□

Ejemplo 3.1.3 *Un sólido tiene como base un círculo de radio r, y todas las intersecciones del sólido con planos verticales paralelos a una dirección fija son rectángulos con altura igual a la mitad de lo que mide su base. Determinar su volumen.*

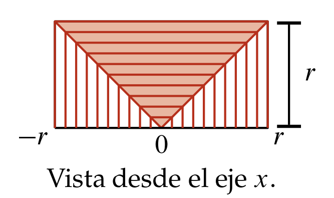
▼ Tal vez lo más difícil en estos problemas es imaginarse el sólido cuyo volumen calcularemos a partir de una descripción verbal, como el enunciado de este ejemplo. Para fijar ideas, supongamos que la base del mismo está en el plano xy, como un circulo de radio r y centro en el origen.



De hecho, visto desde arriba, este círculo es todo lo que veríamos del sólido. Supongamos que las intersecciones del sólido con planos verticales y paralelos al eje y son los rectángulos que dice el enunciado. Entonces la línea marcada en la figura anterior sería la base de uno de esos rectángulos; observe que esa línea tiene una longitud $\ell(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Por otro lado, si vemos el sólido de perfil desde el eje y o desde el eje x, veríamos algo así:

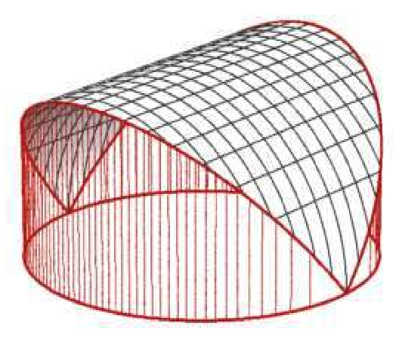


Vista desde el eje y.



Vista desde el eje x.

Un bosquejo del sólido es



Una vez que visualizamos el sólido, para el cálculo de su volumen podemos elegir el eje x para integrar la función del área $A(x)$, donde $-r \le x \le r$. Como observamos antes, la longitud de la base del rectángulo que resulta al intersecar el sólido con el plano vertical paralelo al eje y y que pasa por el punto x es

$$\ell(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2};$$

su altura es la mitad de $\ell(x)$; por lo tanto, tenemos:

$$A(x) = (2\sqrt{r^2 - x^2})(\sqrt{r^2 - x^2}) = 2(r^2 - x^2),$$

donde el volumen es

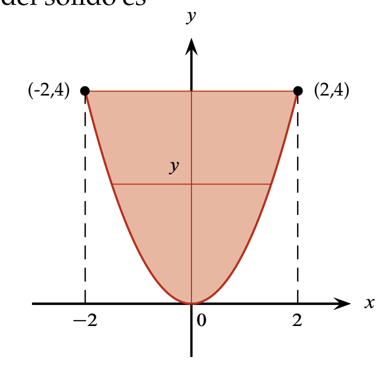
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} 2(r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x \overset{\alpha}{=} 2 \cdot 2 \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = 4\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r =$$
$$= 4\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{8}{3} r^3.$$

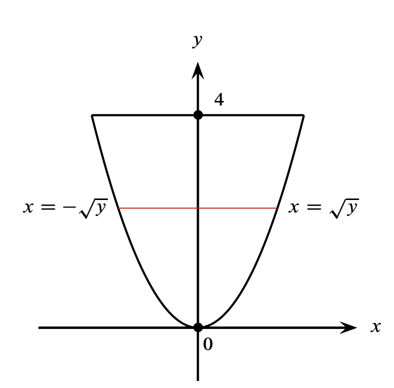
Observe que en la igualdad α se hizo uso de la paridad del integrando para reducir la integral de $-r$ a r al doble de la integral de 0 a r.

□

Ejemplo 3.1.4 *Un sólido tiene base en el sector de parábola comprendido entre $y = x^2$ y la recta $y = 4$, y las intersecciones con planos perpendiculares a la base y paralelos al eje x son cuadrados. Determinar su volumen.*

▼ La base del sólido es





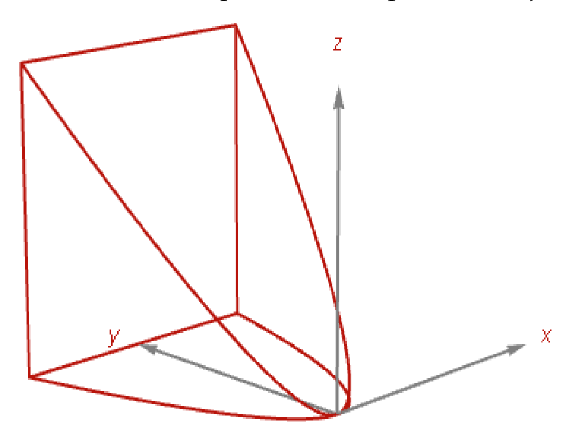
Donde la región se representa como:

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -2 \le x \le 2 \quad \& \quad x^2 \le y \le 4 \right\}$$

o bien

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le y \le 4 \qquad \& \qquad -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \right\}.$$

Las dos formas de describir la base R del sólido son igualmente válidas, sin embargo, la segunda es más adecuada al propósito de calcular el volumen del sólido. La línea marcada a la altura y será la base del cuadrado que resulta de cortar al sólido con un plano vertical paralelo al eje x, como se muestra:



Si escogemos como eje de rotación al eje y para calcular el volumen, vemos que $0 \le y \le 4$ y que el lado del cuadrado en la base mide $\ell(y) = 2\sqrt{y}$, por lo que su área es

$$A(y) = (2\sqrt{y})^2 = 4y.$$

El cálculo del volumen es

$$V = \int_0^4 A(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^4 4y\ \mathrm{d}y = 4\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = 32\ \mathrm{u}^3.$$

□

Ejercicios 3.3.1 *Volúmenes. Soluciones en la página 52*

1. Un sólido tiene como base un círculo de radio 5 en el plano xy. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas sus intersecciones con planos verticales, paralelos a una dirección fija son
   a. Cuadrados.
   b. Triángulos equiláteros (con base en el plano xy).
   c. Rectángulos de altura 1.
2. La región R del plano entre las curvas $y = x^2 - 3x - 2$ & $y = x - 1$ es la base de un sólido. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas las intersecciones con planos paralelos al eje y son
   a. Cuadrados.
   b. Rectángulos de altura 1.
   c. Rectángulos con perímetro 10.
3. La región R del plano entre las curvas $y = x^2$ & $y = \sqrt{x}$ es la base de un sólido. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas las intersecciones con planos paralelos al eje y son
   a. Cuadrados.
   b. Hipotenusas de triángulos rectángulos isósceles.
   c. Diámetros de círculos.

4. La región R del plano entre la curva $y = \cos x$ & el eje x entre $x = -\dfrac{\pi}{2}$ & $x = \dfrac{\pi}{2}$ es la base de un sólido. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas las intersecciones con planos perpendiculares al eje x son

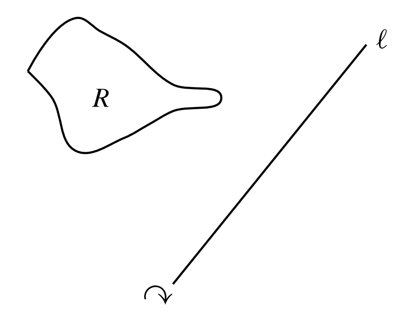
   a. Cuadrados.

   b. Rectángulos de perímetro 2.

   c. Diámetros de semicírculos.

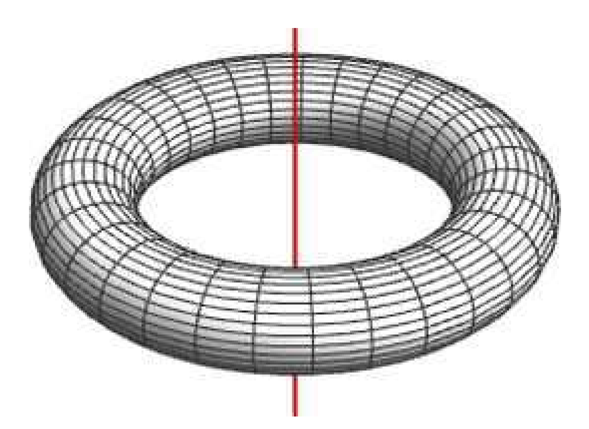
3.3.1 Volúmenes de sólidos de revolución

Un caso especial de volumen de un sólido es el de los sólidos de revolución. Estos sólidos se obtienen al hacer girar una región plana alrededor de un eje (recta) que está en el mismo plano que la región, sin atravesarla:



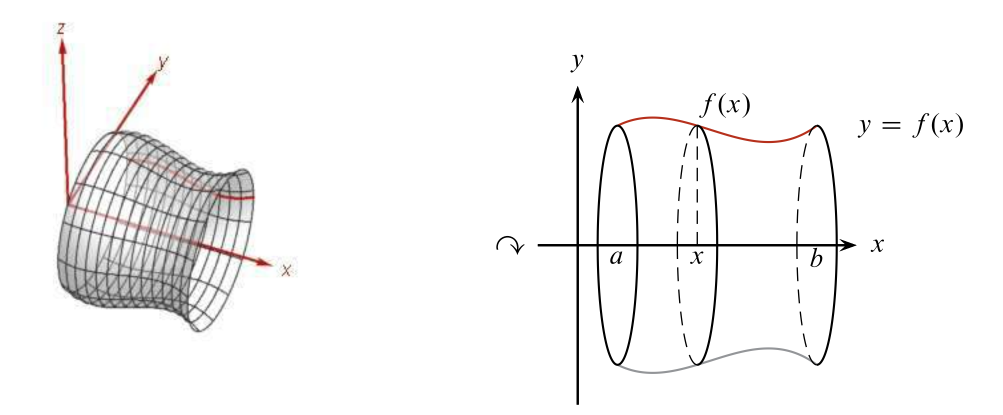
Ejemplos de este tipo de sólidos en la vida cotidiana: vasos, copas, botellas, entre otros, al igual que muchas piezas mecánicas, tienen forma de sólidos de revolución. Los conos y cilindros circulares rectos, las esferas, elipsoides y muchos sólidos más son de este tipo.

Por ejemplo, un toro se genera al girar un círculo alrededor de una recta



El resultado es esta figura que tiene la forma de una dona o rosquilla. Ahora bien, ¿cómo se calcula el volumen de un sólido de revolución? Empezaremos por un caso sencillo.

Consideremos una función $f(x) \geq 0$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ y el sólido generardo al girar la región bajo la gráfica de $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$ & $x = b$ alrededor del eje x:



En este caso conviene tomar como eje para el cálculo del volumen al propio eje x (que es el eje de revolución) y no olvidar que cualquier sección transversal obtenida al intersecar al sólido con un plano perpendicular al eje x por un punto x entre a, b es un círculo. El área de ese círculo es

$$A(x) = \pi[\text{radio en } x]^2,$$

pero se puede ver, por la figura anterior, que el radio en x es $f(x)$, por lo que

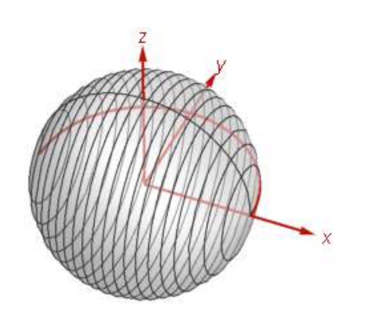
$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

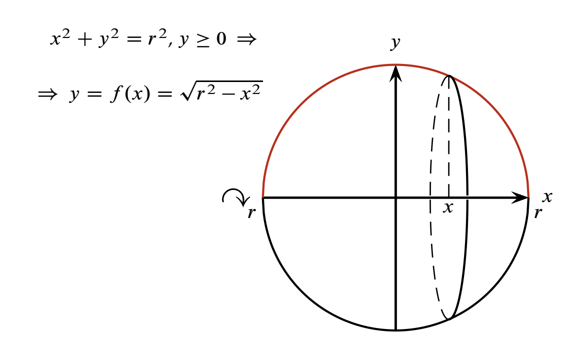
Así que el volumen del sólido de revolución es

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \pi[f(x)]^2\ \mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.3.5 *Calcular el volumen de una esfera de radio r.*

▼ Podemos considerar la esfera como el sólido de revolución generado al girar el semicírculo de radio r con centro en el origen alrededor del eje x:





Como $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 = \pi(r^2 - x^2);$$

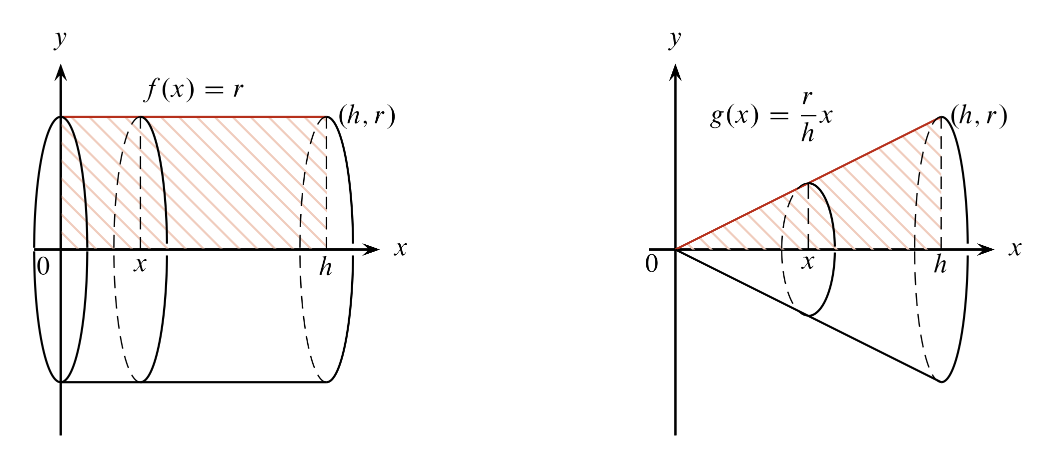
el volumen es

$$V(x) = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3\ \mathrm{u}^3.$$

□

Ejemplo 3.3.6 *Calcular el volumen de un cilindro y de un cono, ambos circulares rectos, con radio r en la base y altura h, considerados como sólidos de revolución.*

▼ Tanto el cilindro como el cono se generan como sólidos de revolución al girar un rectángulo y un triángulo, respectivamente, alrededor del eje x como se muestra en la figura:



Utilizamos la fórmula (3.1) de la pág. 11 para el cálculo del volumen de revolución con $f(x) = r$ para el cilindro así como $g(x) = \dfrac{r}{h}x$ para el cono (puesto que $y = \dfrac{r}{h}x$ es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (h, r), obtenemos:

Para el cilindro,

$$\text{volumen } = \int_0^h \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^h r^2\,\mathrm{d}x = \pi r^2 x\Big|_0^h = \pi r^2 h\ \mathrm{u}^3.$$

Para el cono,

$$\text{volumen } = \int_0^h \pi[g(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h\ \mathrm{u}^3.$$

Esto es:

1. El volumen del cilindro es el área de su base (πr^2) por la altura h.
2. El volumen del cono es $\dfrac{1}{3}$ del volumen del cilindro.

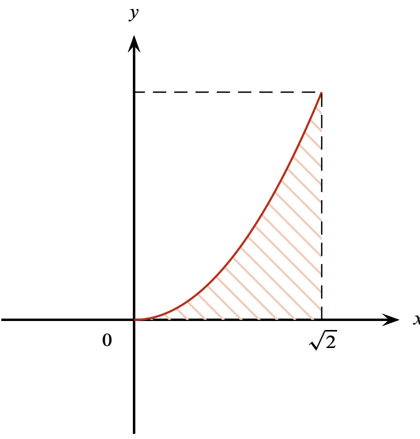
Como vimos en el ejemplo (3.1.2).

□

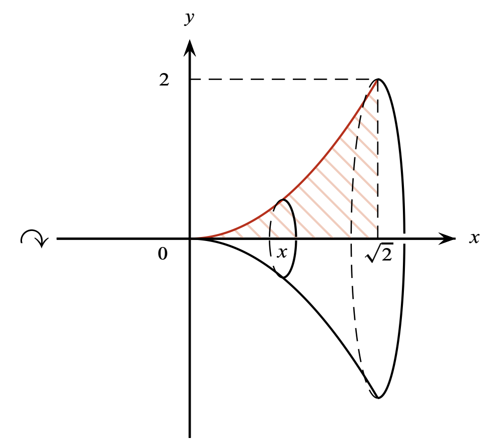
Ejemplo 3.3.7 *Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región comprendida entre la curva $y = x^2$, el eje x y la recta vertical $x = \sqrt{2}$ alrededor de:*

1. *El eje x.*
2. *El eje y.*

▼
La región que gira, tiene dos lados rectos (el eje x & la recta $x = \sqrt{2}$) y un tercer lado curvo, la parábola $y = x^2$.



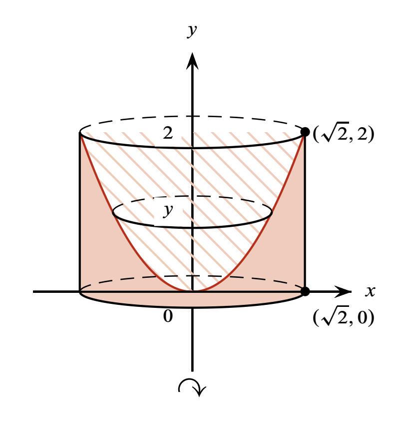
1. Eje de giro o rotación: el eje x.



Aplicando la fórmula (3.1) de la pág. 11 para volúmenes de revolución y usando $f(x) = x^2$:

$$\text{Volumen } = \int_0^{\sqrt{2}} \pi[f(x)]^2\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} (x^2)^2\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} x^4\,dx = \pi\frac{x^5}{5}\bigg|_0^{\sqrt{2}} = \pi\frac{(\sqrt{2})^5}{5} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{5}.$$

2. Eje de giro o rotación: el eje y.

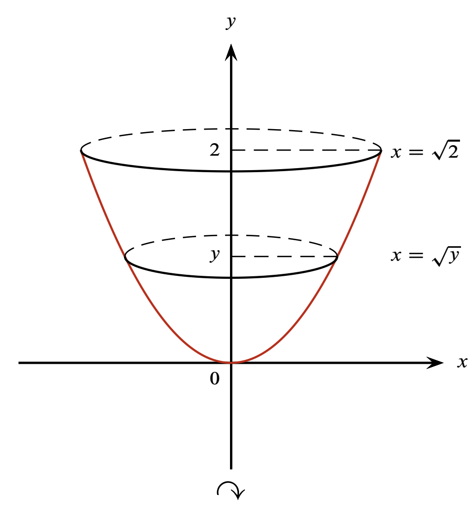


El sólido que se obtiene es un cilindro al que se le ha removido un volumen con forma de paraboloide de revolución.

Podemos calcular el volumen, encontrando primero el volumen del cilindro sólido y restándole el volumen del paraboloide que se le ha removido. El cilindro tiene radio en la base $\sqrt{2}$ y altura 2, por lo que su volumen es

$$V_{\text{cil}} = \pi(\sqrt{2})^2(2) = 4\pi\,\text{u}^3.$$

Para el volumen del paraboloide removido hay que integrar sobre el eje y desde 0 hasta 2, y el radio correspondiente a la altura y está dado por la abscisa x del punto en la parábola $y = x^2$ con ordenada y:



Esto significa que si escribimos x en función de y tendremos $x = g(y) = \sqrt{y}$. Por lo tanto, la integral que corresponde al volumen del paraboloide es

$$\text{Vol}_{\text{p}} = \int_0^2 \pi[g(y)]^2\,\text{d}y = \int_0^2 \pi(\sqrt{y})^2\,\text{d}y = \pi\int_0^2 y\,\text{d}y = \pi\frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(2^2 - 0^2\right) = 2\pi.$$

El volumen buscado es

$$\text{Volumen} = V_{\text{cil}} - \text{Vol}_{\text{p}} = 4\pi - 2\pi = 2\pi\,\text{u}^3.$$

□

3.3.2 Volúmenes de sólidos de revolución. Método de las Arandelas

En los ejemplos considerados hasta el momento, el eje de revolución ha sido una parte de la frontera de la región $\overline{R}$ que se gira alrededor del eje (figura A), pero ¿que sucederá si dicho eje está separado de la región R al girar? (figura B) ¿Cómo calcular el volumen resultante?

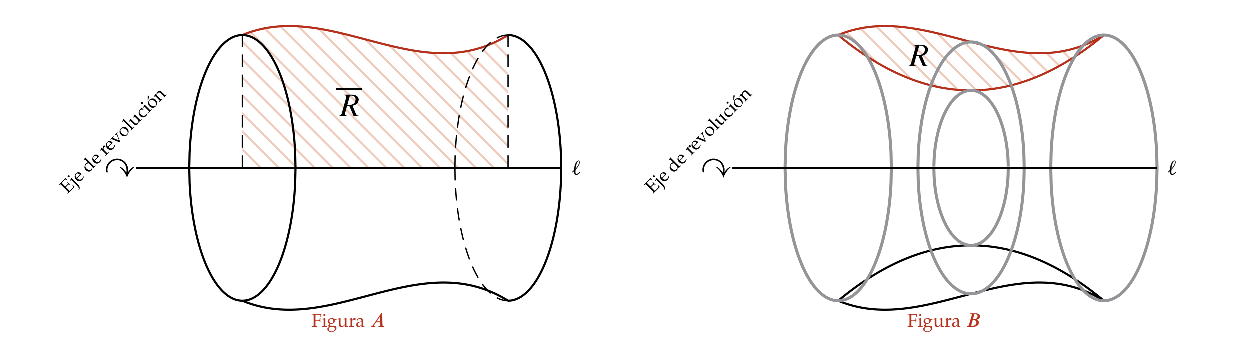


Figura *A* Figura *B*

Si rotamos la región R alrededor de la recta ℓ, al menos 360°, el resultado es un sólido de revolución con un hueco o perforación. Para resolver este problema, es preciso:

- Calcular el volumen del sólido exterior. Esto es, el volumen que se forma al rotar la región $\overline{R}$.
- Calcular el volumen del sólido interior. Es decir, el volumen del hueco, considerado como un sólido que se remueve del sólido exterior.

Entonces, al girar la región R alrededor del eje ℓ:

$$\text{Volumen del sólido generado por } R = \text{volumen exterior} - \text{volumen interior}.$$

Para darle una forma más concisa a la igualdad anterior, suponemos que la recta ℓ es el eje x y además que la región R se puede describir como sigue:

$$R \text{ consta de los puntos } (x, y), \text{ con } a \le x \le b, \text{ y con } g(x) \le y \le f(x);$$
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b \ \& \ g(x) \le y \le f(x) \right\}.$$

Por lo tanto, la región R se encuentra definida como la porción del plano xy entre las gráficas de dos funciones, $f(x)$ la función que define la región exterior así como $g(x)$ la función que define la región interior con respecto al eje de revolución ℓ.

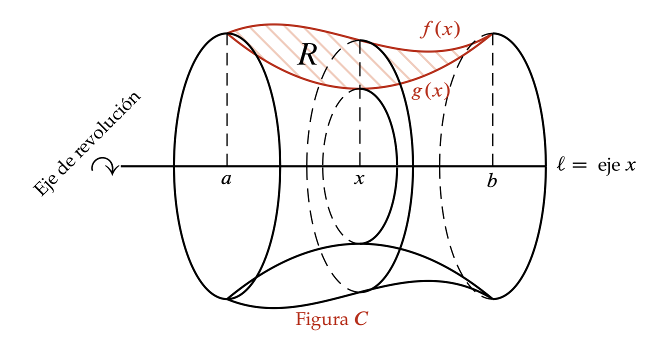
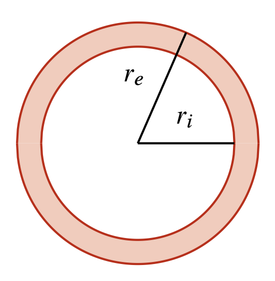


Figura C

Entonces, continuando con el razonamiento, el volumen V del sólido generado por R al girar alrededor del eje x, es

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \, dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2 \, dx = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2] \, dx.$$

Una manera alternativa de obtener esta fórmula es considerar el mismo sólido de la figura C, con secciones transversales perpendiculares al eje de rotación cuya forma es la de un disco perforado o arandela, es decir, la región comprendida entre dos círculos concéntricos cuyos radios son $r_e =$ radio exterior y $r_i =$ radio interior:



El área de dicha figura es

$$\pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi(r_e^2 - r_i^2).$$

Para cada x en el intervalo $[a, b]$, la arandela obtenida al hacer el corte transversal por x tiene radios $r_e = f(x)$ & $r_i = g(x)$, de modo que su área será

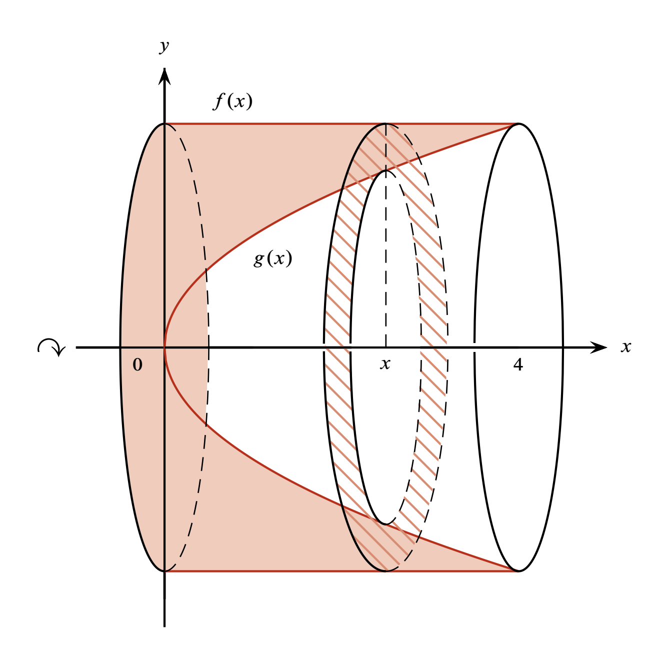
$$A(x) = \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right].$$

El volumen de revolución se obtendrá de la siguiente manera:

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]\mathrm{d}x.$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este método.

Ejemplo 3.3.8 *Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x, la región R comprendida entre $f(x) = 4$ & $g(x) = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.*



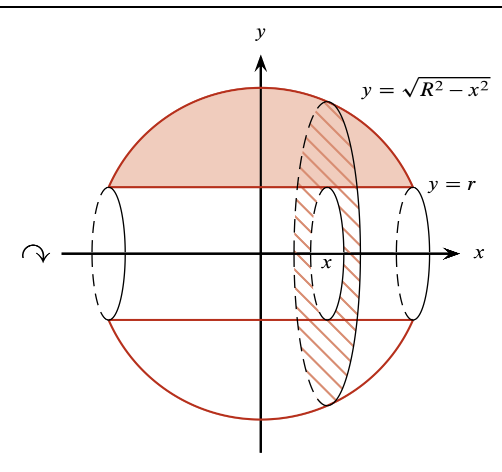
▼ El intervalo de integración para obtener el volumen es $[0, 4]$ y las funciones para calcular los radios exterior e interior del corte transversal en x son $f(x) = 4$ & $g(x) = 2\sqrt{x}$, respectivamente; así que el volumen se calcula:

$$V = \int_a^b \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]\mathrm{d}x = \pi\int_0^4 [4^2 - (2\sqrt{x})^2]\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^4 [16 - 4x]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi(16x - 2x^2)\Big|_0^4 = \pi(64 - 32) = 32\pi\,\mathrm{u}^3.$$

□

Ejemplo 3.3.9 *Determinar el volumen de una esfera de radio R a la que se practica una perforación cilíndrica, de radio $r < R$, a lo largo de uno de sus diámetros.*



▼ Podemos imaginar la esfera con la perforación indicada, como el sólido generado al girar la región sombreada en la figura alrededor del eje x. Es claro, para cualquier sección transversal, que el radio exterior es $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ y que el radio interior es $g(x) = r$, el cual debe cumplir $r < R$. Hace falta calcular los límites de integración. Para ello baste notar que el semicírculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ y la recta horizontal $y = r$ se intersecan cuando:

$$\sqrt{R^2 - x^2} = r \Rightarrow x^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Así tenemos que los límites de integración son $-\sqrt{R^2 - r^2}$ & $\sqrt{R^2 - r^2}$; el volumen buscado es

$$V = \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \pi\left[(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - r^2\right] \mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \pi\left[(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - r^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} (R^2 - r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[(R^2 - r^2)x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-r^2}} =$$
$$= 2\pi\left[(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{(\sqrt{R^2 - r^2})^3}{3}\right] = 2\pi\left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] =$$
$$= \frac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

□

Ejemplo 3.3.10 *Sea R la región del plano limitada por la recta $y - 2x = 0$ y la parábola $x^2 - y = 0$. Utilice el método de Arandelas para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de*

1. $y = 0$.
2. $x = 0$.
3. $y = 5$.
4. $x = 3$.
5. $y = -1$.
6. $x = -1$.

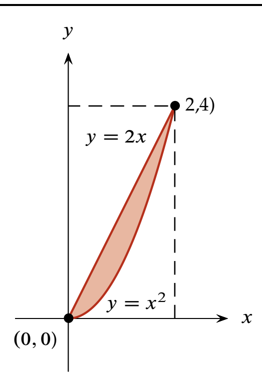
▼ Calculamos las intersecciones entre la recta $\ell(x) = 2x$ & la parábola $p(x) = x^2$.

$$\ell(x) = p(x) \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\&\; x = 2.$$

Los puntos de intersección en el plano son

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (2, 4).$$

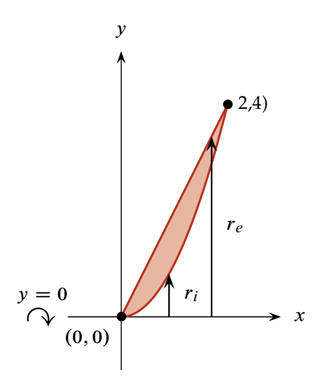
Pintamos la región R en el plano:



1. Eje de rotación $y = 0$.

   Para calcular el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $y = 0$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

   a. El radio exterior $r_e = \ell(x) - 0 = \ell(x) = 2x$.
   b. El radio interior $r_i = p(x) - 0 = p(x) = x^2$.



   Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^2 = \frac{64}{15}\pi.$$

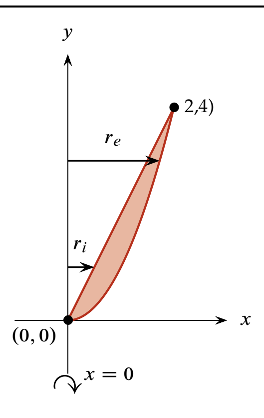
2. Eje de rotación $x = 0$.

   Para poder aplicar el método de las arandelas se requiere medir la longitud de los radios exterior e interior de la frontera de la región que rota alrededor del eje $x = 0$. Estos radios son perpendiculares al eje de rotación. En nuestro caso, el eje de rotación es el eje y. Por lo tanto las funciones que definen la región deben de tener variable independiente y, es decir, de la forma $x = g(y)$. Ahora es fácil despejar la variable x de las ecuaciones y obtener explícitamente las funciones inversas. Veamos:

$$\ell(x) = y = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y = i\ell(y);$$
$$p(x) = y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = ip(y).$$

   La función $i\ell(y)$ es la inversa de la función $\ell(x)$, es decir, $i\ell[\ell(x)] = x$ & $\ell[i\ell(y)] = y$, como se puede comprobar haciendo la composicion de funciones. Lo mismo sucede con la otra función $p(x)$ y su inversa $ip(y)$.

   R se encuentra entre las gráficas de $i\ell(y)$ & $ip(y)$ en el intervalo $[0, 4]$



Para calcular ahora el área de la arandela se requiere medir los radios del eje de rotación $x = 0$ a las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio exterior $r_e = ip(y) - 0 = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$.

b. El radio interior $r_i = i\ell(y) - 0 = \dfrac{1}{2}y$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

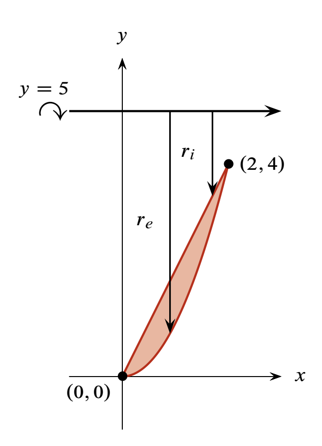
$$V_R = \int_0^4 \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi \left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$
$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{1}{4}y^2\right) \mathrm{d}y = \pi \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3\right)\Big|_0^4 = \frac{8}{3}\pi.$$

3. Eje de rotación $y = 5$.

Para calcular el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $y = 5$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio interior $r_i = 5 - \ell(x) = 5 - 2x$.

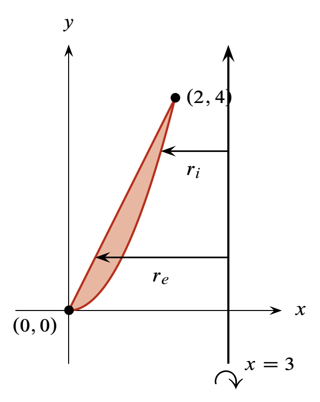
b. El radio exterior $r_e = 5 - p(x) = 5 - x^2$.



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi \left[(5 - x^2)^2 - (5 - 2x)^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \int_0^2 \left(20x - 14x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x = \pi \left(10x^2 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{136}{15}\pi.$$

4. Eje de rotación $x = 3$.



Para calcular ahora el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $x = 3$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio interior $r_i = 3 - i\,p(y) = 3 - \sqrt{y}$.
b. El radio exterior $r_e = 3 - i\,\ell(y) = 3 - \dfrac{1}{2}y$.

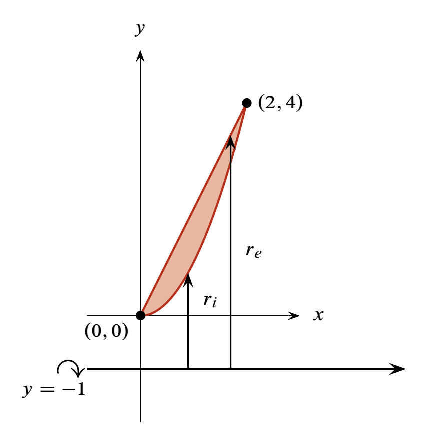
Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi\left[\left(3 - \frac{1}{2}y\right)^2 - (3 - \sqrt{y})^2\right] \mathrm{d}y =$$
$$= \pi \int_0^4 \left(6\sqrt{y} - 4y + \frac{1}{4}y^2\right) \mathrm{d}y = \pi\left(4y^{\frac{3}{2}} - 2y^2 + \frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}\pi.$$

5. Eje de rotación $y = -1$.

Para calcular el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $y = -1$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

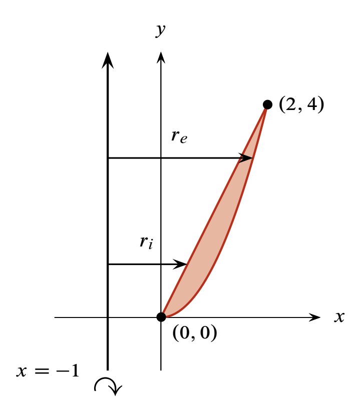
a. El radio interior $r_i = p(x) - (-1) = x^2 + 1$.
b. El radio exterior $r_e = \ell(x) - (-1) = \ell(x) + 1 = 2x + 1$.



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi\left[(2x+1)^2 - (x^2+1)^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \int_0^2 \left(4x + 2x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi\left(2x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2 = \frac{104}{15}\pi.$$

6. Eje de rotación $x = -1$.



Para calcular ahora el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $x = -1$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio exterior $r_e = ip(y) - (-1) = \sqrt{y} + 1$.
b. El radio interior $r_i = i\ell(y) - (-1) = \frac{1}{2}y + 1$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

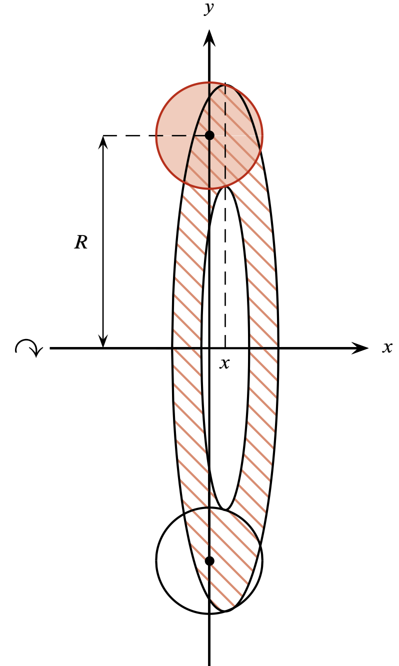
$$V_R = \int_0^4 \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi \left[\left(\sqrt{y} + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + 1\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_0^4 \left(2\sqrt{y} - \frac{1}{4}y^2\right) \mathrm{d}y = \pi \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}y^3\right)\bigg|_0^4 = \frac{16}{3}\pi.$$

□

Ejemplo 3.3.11 *El sólido de revolución generado al girar un círculo de radio r alrededor de una recta en su mismo plano situada a una distancia $R \geq r$ del centro del círculo se llama toro. Determinar el volumen de dicho sólido.*

▼ Para fijar notación e ideas, podemos suponer que el círculo de radio r tiene su centro en el eje y, y que se gira alrededor del eje x.



Por lo tanto el centro estará en $(0, R)$ y la ecuación del círculo será

$$(x-0)^2 + (y-R)^2 = r^2,$$

de donde

$$(y-R)^2 = r^2 - x^2 \;\Rightarrow\; y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Se toma el signo positivo para describir el semicírculo superior y el negativo para el inferior. En la figura se describe cómo se vería un corte transversal del sólido al nivel x, para x entre $-r$ & r. Es claro que el radio exterior de la arandela es $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ y que el radio interior es $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$, de modo que el volumen buscado es

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] \mathrm{d}x = \pi \int_{r}^{r} \left[(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right] \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Para resolver esta integral, utilizamos sustitución trigonométrica:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = r\cos\theta \;\&\; r^2 - x^2 = r^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2\left(1 - \operatorname{sen}^2\theta\right) = r^2\cos^2\theta,$$

tomando en cuenta que el intervalo de integración es, $0 \leqslant x \leqslant r$ con el cambio de variable se convierte en $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, en donde el $\cos\theta$ es no negativo, tenemos:

$$V = 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 8\pi R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2\theta}\cdot r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\pi R\cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= 8\pi R\cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 4\pi\cdot Rr^2\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = 4\pi Rr^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 r^2 R.$$

Por lo tanto el volumen del toro es

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

□

Ejemplo 3.3.12 *Sea R la región del plano limitada por las rectas $y = -2x - 3$, $7x - y + 9 = 0$ & $4x - y + 2 = 0$. Usando el método de Arandelas, calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de los siguientes ejes:*

1. $y = 0$.
2. $x = 0$.
3. $y = 1$.
4. $x = 2$.
5. $y = -8$.
6. $x = -4$.

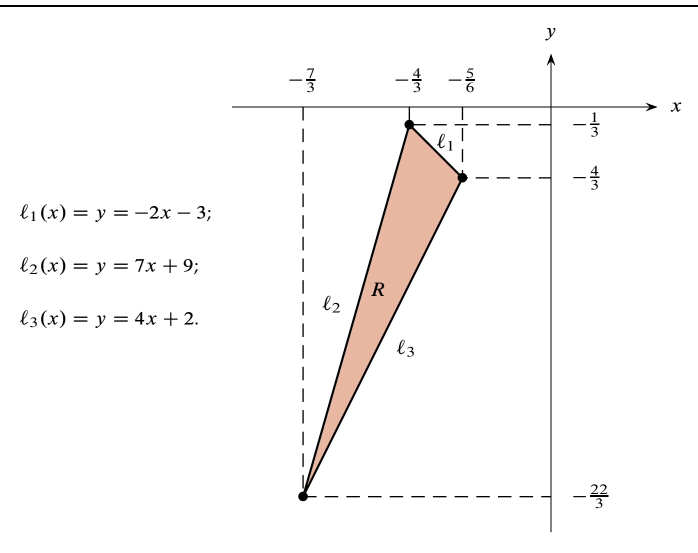
▼ Calculamos las intersecciones de las rectas $\ell_1(x) = -2x - 3$, $\ell_2(x) = 7x + 9$, $\ell_3(x) = 4x + 2$.

$$\ell_1(x) = \ell_2(x) \;\Rightarrow\; -2x - 3 = 7x + 9 \;\Rightarrow\; 9x = -12 \;\Rightarrow\; x = -\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; y = \ell_1(x) = -\frac{1}{3}.$$
$$\ell_1(x) = \ell_3(x) \;\Rightarrow\; -2x - 3 = 4x + 2 \;\Rightarrow\; 6x = -5 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5}{6} \;\Rightarrow\; y = \ell_1(x) = -\frac{4}{3}.$$
$$\ell_2(x) = \ell_3(x) \;\Rightarrow\; 7x + 9 = 4x + 2 \;\Rightarrow\; 3x = -7 \;\Rightarrow\; x = -\frac{7}{3} \;\Rightarrow\; y = \ell_2(x) = -\frac{22}{3}.$$

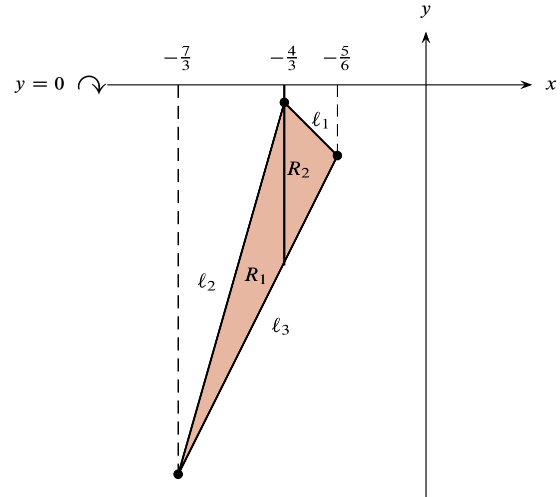
Los puntos de intersección en el plano son

$$P_{12} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad P_{13} = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}\right), \quad P_{23} = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{22}{3}\right).$$

Dibujamos la región R en el plano:



1. Eje de rotación $y = 0$.
   En la siguiente figura, la región R se divide en dos subregiones R_1 & R_2.
   a. R_1 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_2(x)$ y $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{4}{3}\right]$.
   b. R_2 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_1 x)$ y $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{6}\right]$.



El área de las arandelas, para cada región, se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $y = 0$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 0 - \ell_3(x) = -\ell_3(x) = -(4x + 2) = -4x - 2$, en ambas regiones.
b. El radio interior $r_i = 0 - \ell_2(x) = -\ell_2(x) = -(7x + 9) = -7x - 9$, en la región R_1.
c. El radio interior $r_i = 0 - \ell_1(x) = -\ell_1(x) = -(-2x - 3) = 2x + 3$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(-4x - 2)^2 - (-7x - 9)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} -11\left(7 + 10x + 3x^2\right) \mathrm{d}x = -11\pi \left(7x + 5x^2 + x^3\right) \Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 11\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left[(-4x-2)^2 - (2x+3)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-5 + 4x + 12x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(-5x + 2x^2 + 4x^3\right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{5}{2}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 11\pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{27}{2}\pi.$$

2. Eje de rotación $x = 0$.

Para poder aplicar el método de las Arandelas se requiere medir los radios exterior e interior de las fronteras de la región que rota alrededor del eje $x = 0$. Estos radios son perpendiculares al eje de rotación. En nuestro caso, el eje de rotación es el eje y. Por lo tanto las funciones que definen la región deben de tener variable independiente y, es decir, de la forma $x = g(y)$. En este caso es fácil despejar la variable x de las ecuaciones de las rectas y obtener explícitamente las funciones inversas. Veamos:

$$\ell_1(x) = y = -2x - 3 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2}(y+3) = i\ell_1(y);$$

$$\ell_2(x) = y = 7x + 9 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{7}(y-9) = i\ell_2(y);$$

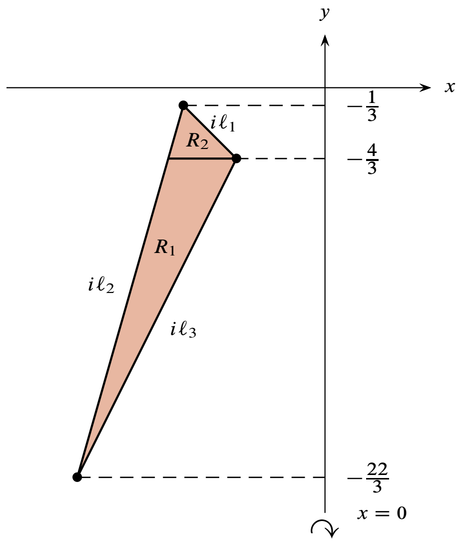
$$\ell_3(x) = y = 4x + 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{4}(y-2) = i\ell_3(y).$$

La función $i\ell_1(y)$ es la inversa de la función $\ell_1(x)$, es decir, $i\ell_1[\ell_1(x)] = x$ & $\ell_1[i\ell_1(y)] = y$, como se puede comprobar haciendo la composicion de funciones. Lo mismo sucede con las otras dos funciones y sus funciones inversas correspondientes.

La región R se divide en dos subregiones R_1 & R_2.

a. R_1 se encuentra entre las gráficas de las rectas $i\ell_2(y)$ e $i\ell_3(y)$ en el intervalo $\left[-\frac{22}{3}, -\frac{4}{3}\right]$.

b. R_2 se encuentra entre las gráficas de las rectas $i\ell_2(y)$ e $i\ell_1(y)$ en el intervalo $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $x = 0$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 0 - i\ell_2(y) = -i\ell_2(y) = -\frac{1}{7}(y-9)$ en ambas regiones.
b. El radio interior $r_i = 0 - i\ell_3(y) = -i\ell_3(y) = -\frac{1}{4}(y-2)$ en la región R_1.
c. El radio interior $r_i = 0 - i\ell_1(y) = -i\ell_1(y) = -\left[-\frac{1}{2}(y+3)\right] = \frac{1}{2}(y+3)$ en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left(\left[-\frac{1}{7}(y-9)\right]^2 - \left[-\frac{1}{4}(y-2)\right]^2\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \pi\int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \frac{-1}{784}\left(-1\,100 + 92y + 33y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{-1}{784}\pi\left(-1\,100y + 46y^2 + 11y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{585}{98}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

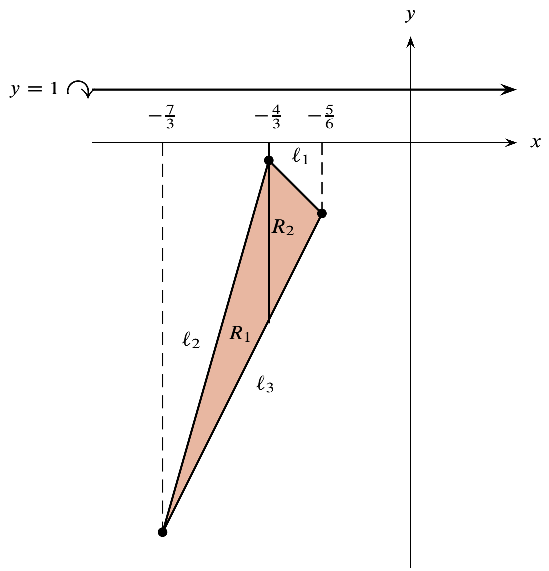
$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)]^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[\left[-\frac{1}{7}(y-9)\right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(y+3)\right]^2\right] \mathrm{d}y =$$
$$= \pi\int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{-3}{196}\left(39 + 122y + 15y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{-3}{196}\pi\left(39y + 61y^2 + 5y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{153}{196}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{585}{98}\pi + \frac{153}{196}\pi = \frac{27}{4}\pi.$$

3. Eje de rotación $y = 1$.

El razonamiento es semejante al del inciso 1., pág. 23. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $y = 1$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 1 - \ell_3(x) = 1 - (4x+2) = -4x - 1$ en ambas regiones.
b. El radio interior $r_i = 1 - \ell_2(x) = 1 - (7x+9) = -7x - 8$ en la región R_1.
c. El radio interior $r_i = 1 - \ell_1(x) = 1 - (-2x-3) = 2x + 4$ en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left([r_e]^2 - [r_i]^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left([-4x-1]^2 - [-7x-8]^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(-63 - 104x - 33x^2\right) \mathrm{d}x = -\pi \left(63x + 52x^2 + 11x^3\right) \Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 14\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left([r_e]^2 - [r_i]^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left([-4x-1]^2 - [2x+4]^2\right) \mathrm{d}x$$

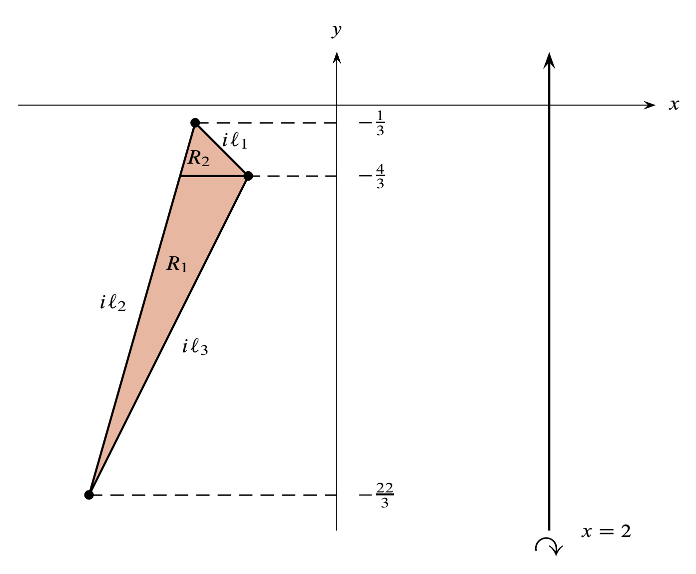
$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-15 - 8x + 12x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(-15x - 4x^2 + 4x^3\right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = 4\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 14\pi + 4\pi = 18\pi.$$

4. Eje de rotación $x = 2$.

El razonamiento es semejante al del inciso 2, p. 24. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias del eje de rotación $x = 2$ a las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 2 - i\ell_2(y) = 2 - \frac{1}{7}(y-9) = -\frac{1}{7}y + \frac{23}{7}$, en ambas regiones.

b. El radio interior $r_i = 2 - i\ell_3(y) = 2 - \frac{1}{4}(y-2) = -\frac{1}{4}y + \frac{5}{2}$, en la región R_1.

c. El radio interior $r_i = 2 - i\ell_1(y) = 2 - \left[-\frac{1}{2}(y+3)\right] = \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[\left(-\frac{1}{7}y + \frac{23}{7}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}y + \frac{5}{2}\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{784}\left(3\,564 + 244y - 33y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{784}\left(3\,564y + 122y^2 - 11y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{1\,341}{98}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi \left[\left(-\frac{1}{7}y + \frac{23}{7}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

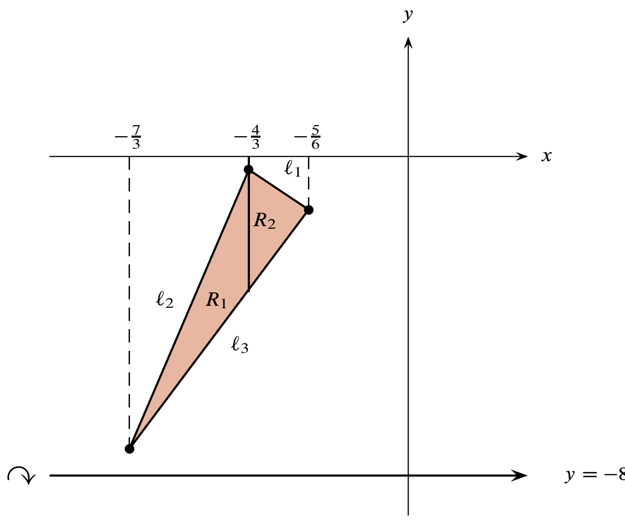
$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} -\frac{15}{196}\left(19 + 58y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = -\frac{15}{196}\pi\left(19y + 29y^2 + y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{405}{196}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{1\,341}{98}\pi + \frac{405}{196}\pi = \frac{63}{4}\pi.$$

5. Eje de rotación $y = -8$.

   El razonamiento es semejante al del inciso 1., pág. 23. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias del eje de rotación $y = -8$ a las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio interior $r_i = \ell_3(x) - (-8) = (4x + 2) + 8 = 4x + 10$, en ambas regiones.
b. El radio exterior $r_e = \ell_2(x) - (-8) = (7x + 9) + 8 = 7x + 17$, en la región R_1.
c. El radio exterior $r_e = \ell_1(x) - (-8) = (-2x - 3) + 8 = -2x + 5$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(7x + 17)^2 - (4x + 10)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(189 + 158x + 33x^2\right) \mathrm{d}x = \pi\left(189x + 79x^2 + 11x^3\right)\Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 13\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2 \right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left[(-2x+5)^2 - (4x+10)^2 \right] \mathrm{d}x =$$

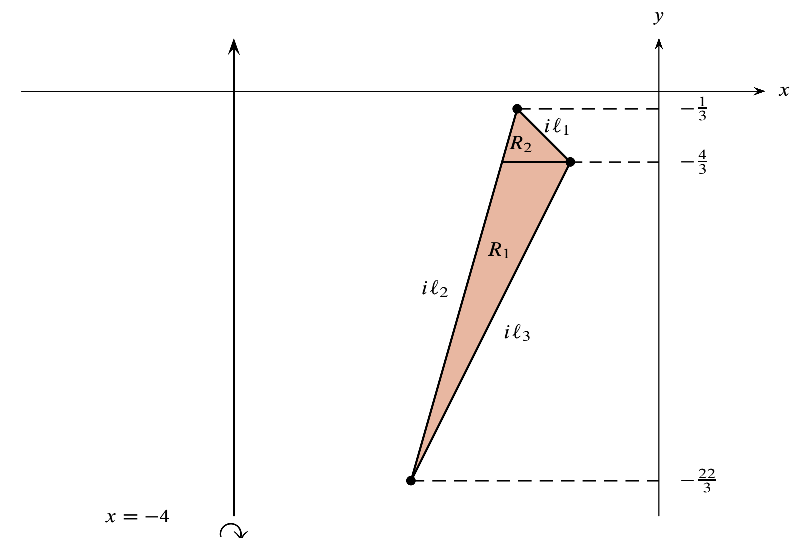
$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-75 - 100x - 12x^2 \right) \mathrm{d}x = -\pi \left(75x + 50x^2 + 4x^3 \right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{19}{2}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 13\pi + \frac{19}{2}\pi = \frac{45}{2}\pi.$$

6. Eje de rotación $x = -4$.

El razonamiento es semejante al del inciso 2., pág. 24. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $x = -4$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio interior $r_i = i\ell_2(y) - (-4) = \frac{1}{7}(y-9) + 4 = \frac{1}{7}y + \frac{19}{7}$, en ambas regiones.

b. El radio exterior $r_e = i\ell_3(y) - (-4) = \frac{1}{4}(y-2) + 4 = \frac{1}{4}y + \frac{7}{2}$, en la región R_1.

c. El radio exterior $r_e = i\ell_1(y) - (-4) = -\frac{1}{2}(y+3) + 4 = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2 \right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[\left(\frac{1}{4}y + \frac{7}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{7}y + \frac{19}{7} \right)^2 \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{784} \left(3\,828 + 764y + 33y^3 \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{784}\pi \left(3\,828y + 382y + 11y^2 \right) \Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{927}{98}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi \left[\left(-\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}y + \frac{19}{7}\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{3}{196}\left(-73 - 214y + 15y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{196}\pi\left(-73y - 107y^2 + 5y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} =$$

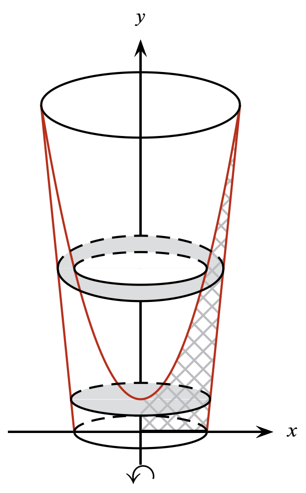
$$= \frac{351}{196}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{927}{98}\pi + \frac{351}{196}\pi = \frac{45}{4}\pi.$$

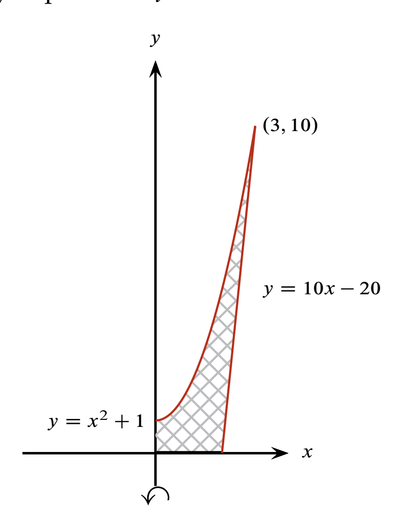
□

Ejemplo 3.3.13 *Un vaso tiene la forma de cono truncado al que se le ha extraído un paraboloide de revolución como se muestra en la figura.*



Calcular el volumen del material necesario para fabricar el vaso.

▼ El sólido se obtiene al girar alrededor del eje y, la región del primer cuadrante comprendida entre los ejes coordenados, la recta $y = 10x - 20$ y la parábola $y = x^2 + 1$.



La región sombreada genera el volumen del vaso. Una rápida inspección da como resultado que la recta $y = 10x - 20$ y la parábola $y = x^2 + 1$ se intersecan en el punto $(3, 10)$:

$$x^2 + 1 = 10x - 20 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(21)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = 5 \pm 2 = \begin{cases} 3; \\ 7. \end{cases}$$

Tomamos el primer valor de x; para dicho valor $x = 3$ tenemos $y = 10$.
Podemos calcular el volumen buscado con el método de las Arandelas, pero como ahora el eje de revolución es el vertical, tendremos que integrar con respecto a y desde 0 hasta 10. También tenemos que tomar en cuenta que las secciones transversales del sólido difieren a distintas alturas.

- Si $0 \leq y \leq 1$, la sección es un círculo.
- Si $1 \leq y \leq 10$, la sección es una arandela.

Los radios correspondientes se obtienen escribiendo las ecuaciones de la recta y parábola para x en función de y:

$$y = 10x - 20 \Rightarrow 10x = y + 20 \Rightarrow x = \frac{1}{10}y + 2. \qquad \boxed{\text{Para la recta}}$$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}. \qquad \boxed{\text{Para la parábola}}$$

Así resulta que

- Si $0 \leq y \leq 1$, el radio del círculo es $x = \dfrac{1}{10}y + 2$; entonces la función del área de la sección transversal es

$$A(y) = \pi\left(\frac{1}{10}y + 2\right)^2.$$

- Si $1 \leq y \leq 10$, el radio exterior de la arandela es $r_e = \dfrac{1}{10}y + 2$, mientras que el radio interior es $r_i = \sqrt{y - 1}$; de aquí que el área de la arandela será

$$A(y) = \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi\left[\left(\frac{1}{10}y + 2\right)^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] = \pi\left[\frac{y^2}{100} + \frac{4y}{10} + 4 - (y - 1)\right] =$$
$$= \pi\left[\frac{1}{100}y^2 - \frac{6}{10}y + 5\right].$$

Con estas consideraciones, el volumen deseado es

$$\text{Volumen} = \int_0^{10} A(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi\left(\frac{1}{10}y + 2\right)^2 \mathrm{d}y + \int_1^{10} \pi\left[\frac{1}{100}y^2 - \frac{6}{10}y + 5\right] \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\pi}{100}\int_0^1 (y + 20)^2\,\mathrm{d}y + \frac{\pi}{100}\int_1^{10} (y^2 - 60y + 500)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\pi}{100}\frac{(y+20)^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{\pi}{100}\left(\frac{y^3}{3} - 30y^2 + 500y\right)\bigg|_1^{10} =$$
$$= \frac{\pi}{300}(21^3 - 20^3) + \frac{\pi}{100}\left[\frac{10^3}{3} - 30 \cdot 10^2 + 500 \cdot 10 - \left(\frac{1^3}{3} - 30 + 500\right)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{300}1\,261 + \frac{\pi}{100}\left[\frac{1\,000}{3} - 3\,000 + 5\,000 - \frac{1}{3} + 30 - 500\right] =$$
$$= \frac{\pi}{300}1\,261 + \frac{\pi}{100}1\,863 = 22.8\overline{3}\pi.$$

Por lo anterior el volumen del material necesario para fabricar el vaso es $22.8\overline{3}\pi \approx 71.733$ u^3.

□

Ejercicios 3.3.2 *Volúmenes.* *Soluciones en la página 52*

1. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $4x - y - 1 = 0$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = -2$.
   e. $y = 15$.
   f. $x = 5$.

2. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x - y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -1$.
   d. $x = -1$.
   e. $y = 6$.
   f. $x = 6$.

3. Sea R la región del plano limitada por el triángulo con vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = -2$.
   e. $y = 3$.
   f. $x = 3$.

4. Sea R la región limitada por el eje x y la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ con $x \in [0, 2\pi]$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 1$.
   b. $y = -3$.
   c. $y = 0$.

5. Sea R la región acotada por las gráficas de la funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = 1 + \operatorname{sen} x$, la recta $x = 0$ & la recta $x = \pi$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $y = -1$.
   c. $y = 4$.

6. Sea R la región acotada por las gráficas de la funciones $y = -\operatorname{sen} x$, $y = 2\operatorname{sen} x$ donde $x \in [-\pi, 0]$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 3$.
   b. $y = -3$.
   c. $x = 0$.
   d. $x = 1$.
   e. $x = -4$.

7. Sea R la región acotada por la gráfica de la función $y = \ln x$, la recta $x = 1$, la recta $x = e$ y el eje x. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 3$.
   d. $x = 3$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -2$.

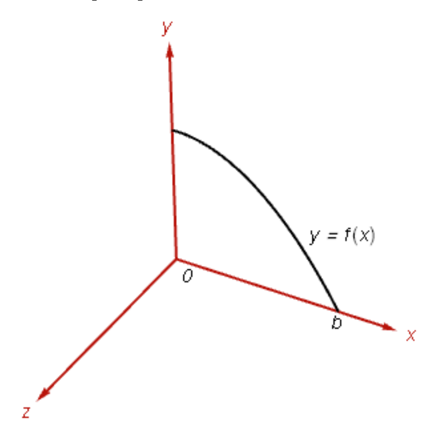
8. Sea R la región acotada por la gráfica de la función $y = \operatorname{arcsen} x$, recta $y = \dfrac{\pi}{2}$ y el eje y. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R de los siguientes ejes:

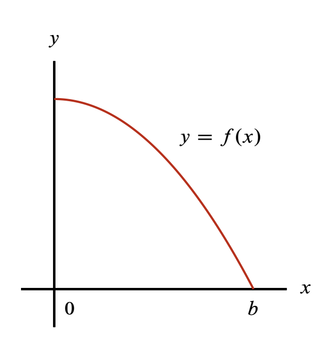
a. $x = 0$.
b. $x = -1$.
c. $x = 3$.
d. $y = 0$.
e. $y = -1$.
f. $y = 2$.

3.3.3 Volúmenes de sólidos de revolución. Método de Cascarones Cilíndricos

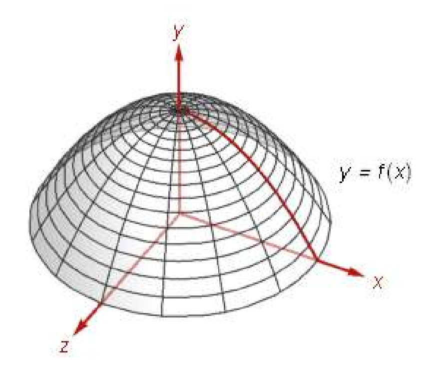
El método que presentamos ahora parte de un principio diferente para calcular un volumen de revolución. Vamos a considerar el sólido como si estuviera formado por hojas o capas cilíndricas muy delgadas.

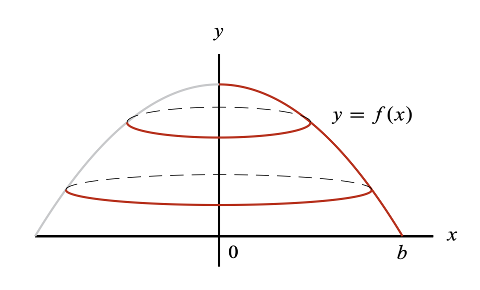
1. Se grafica la curva y se determina la región que rota alrededor del eje y. En este caso, el dominio de esta curva es $[0, b]$.





2. El sólido de revolución se obtiene al rotar la región.





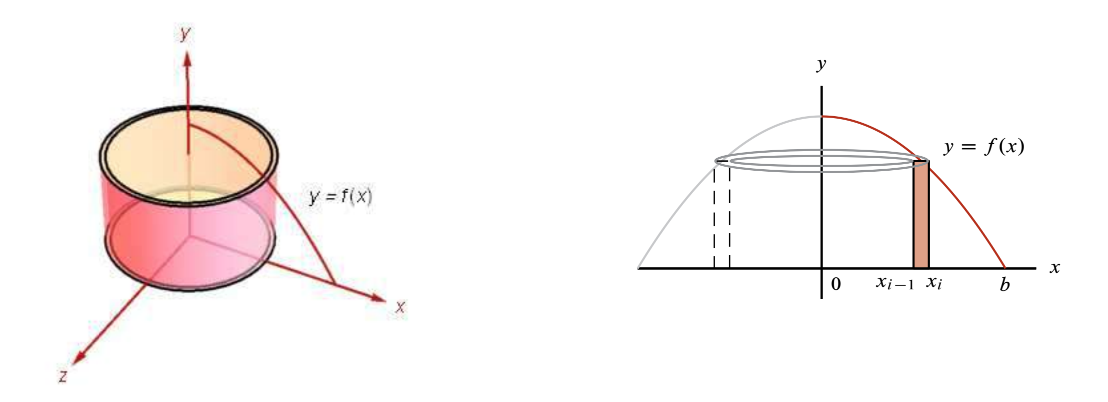
3. Para calcular el volumen del sólido es preciso lo siguiente:

   ⋆ Se hace una partición del intervalo $[0, b]$ que define la región que rota, esto es

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

* Para cada subintervalo de la partición, $[x_{i-1}, x_i]$, tomamos el punto medio $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Construimos el rectángulo de altura $f(x_i^*)$ y base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

* Al rotar este rectángulo alrededor del eje y, como se ve en la figura,



obtenemos un cascarón cilindrico.

* Para calcular el volumen de este cascarón cilíndrico, restamos del volumen del cilindro exterior con radio x_i el volumen del cilindro interior con radio x_{i-1} [ambos cilindros con altura $f(x_i^*)$].

$$\begin{aligned} V_e - V_i &= \pi(x_i)^2 f(x_i^*) - \pi(x_{i-1})^2 f(x_i^*) = \pi[(x_i)^2 - (x_{i-1})^2] f(x_i^*) = \\ &= \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(x_i^*) = 2\pi(x_i - x_{i-1}) \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} f(x_i^*) = \\ &= 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta_i x. \qquad \boxed{\Delta_i x = x_i - x_{i-1}; \quad x_i^* = \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}.} \end{aligned}$$

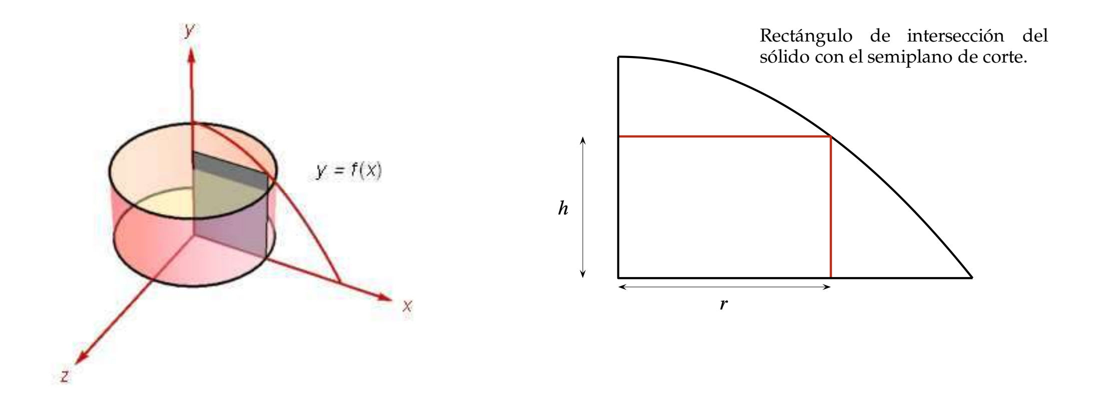
* El volumen del sólido de revolución B se aproxima sumando los volúmenes de los cascarones cilíndricos así contruidos:

$$\mathrm{V}(B) \approx \sum_{i=i}^{n} 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta_i x = 2\pi \sum_{i=i}^{n} x_i^* f(x_i^*) \Delta_i x.$$

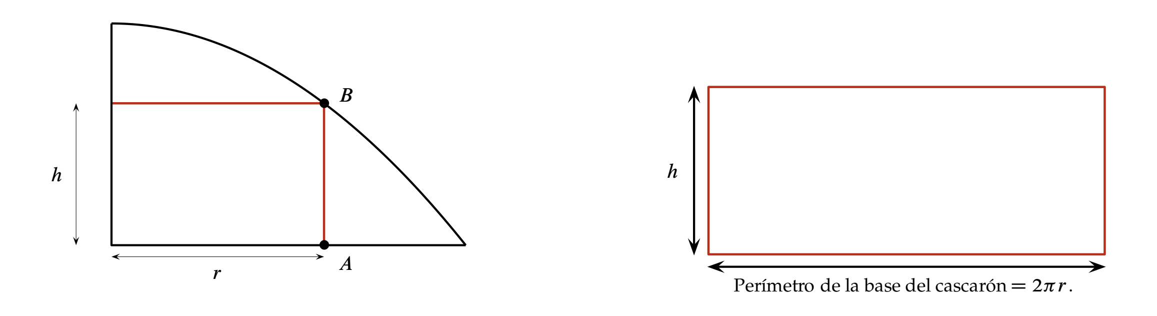
* La aproximación será mejor a medida que tomamos particiones más finas, con n tendiendo a ∞ y a la vez Δx_i tendiendo a cero. El volumen del sólido es

$$\mathrm{Vol}(B) = 2\pi \int_0^b x f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Si usamos un plano que pasa por el eje de revolución, como el de la figura:



Obtenemos un corte del sólido de revolución en donde se ve el cascarón cilíndrico de radio r & altura h. El perímetro de la base del cascarón cilíndrico es $2\pi r$.



El cascarón cilíndrico se obtiene haciendo rotar el segmento $\overline{AB}$ alrededor del eje y (el eje de rotación). Esta recta se encuentra a una distancia r del eje de rotación (radio del cilindro) y tiene una longitud h (altura del cilindro). Tenemos por lo tanto:

$$\text{Área lateral de cilindro} \;= A(r) = 2\pi r h.$$

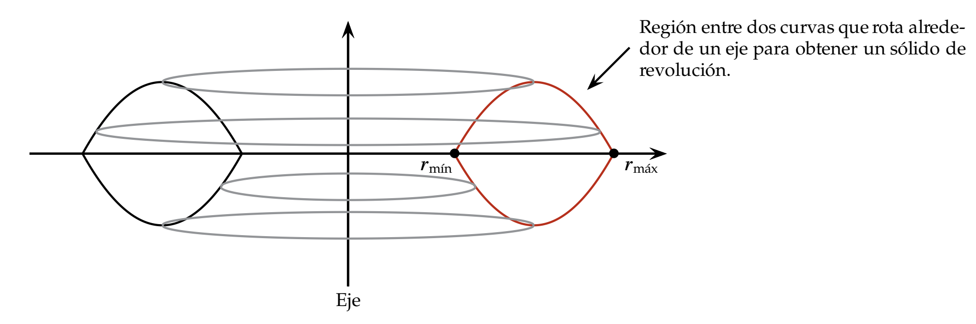
Para este ejemplo, $r = x \in [0, b]$ & $h = f(x)$ es la función que define la región que rota.

Prodríamos pensar que cada capa cilíndrica tiene un grosor $\mathrm{d}r$ y por lo tanto el volumen de revolución es

$$V = \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} 2\pi r h \; \mathrm{d}r = \int_0^b 2\pi x f(x) \; \mathrm{d}x.$$

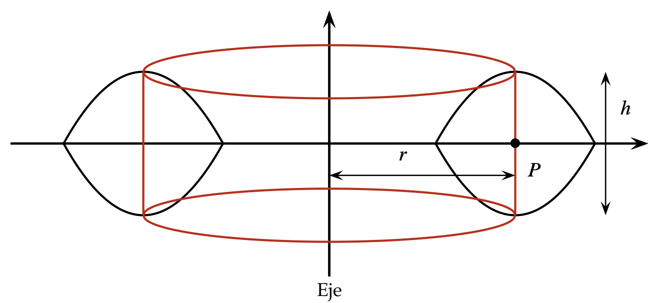
Aquí, por supuesto, se debe escribir $h = f(r)$ como función de $r = x$ para poder realizar el cálculo. Los límites de integración $r_{\text{mín}}$ & $r_{\text{máx}}$ son los extremos del dominio de la función que define la región que rota.

Rotación de una región entre dos curvas



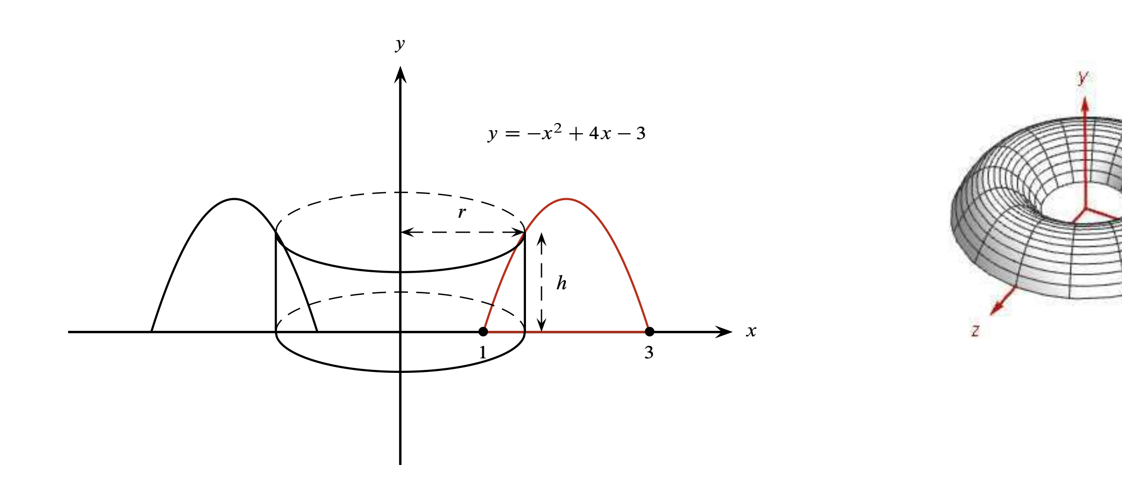
Debe tenerse claro que (veánse figuras):

- El intervalo $[r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ define a la región entre las curvas.
- $P \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$.
- r es el radio de cada cascarón cilíndrico y es la distancia de punto P a la recta que es el eje de revolución.
- h mide la longitud del segmento entre las curvas en el punto P. Este segmento es paralelo al eje de revolución.



Ejemplo 3.3.14 *Se tiene una región limitada como sigue: arriba por la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$, abajo por el eje x. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje y.*

▼ La región que se rota es la señalada en la figura y está comprendida entre la parábola con vértice $(2, 1)$ que abre sus ramas hacia abajo y el eje x al cual corta en $x = 1$ y en $x = 3$.

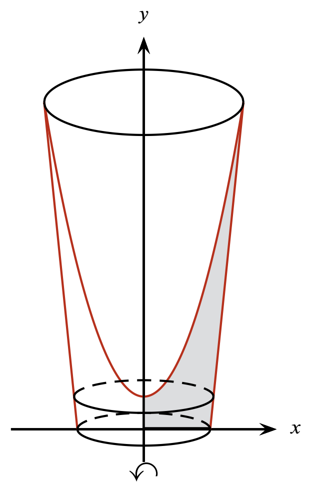


Como el eje de giro es el eje y entonces, el radio es $r = x$ & la altura es $h = f(x) = -x^2 + 4x - 3$; así que el volumen buscado es

$$V = \int_1^3 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_1^3 2\pi x(-x^2 + 4x - 3) \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_1^3 = 2\pi \left[-\frac{81-1}{4} + 4\frac{27-1}{3} - 3\frac{9-1}{2} \right] =$$
$$= 2\pi \left[-20 + \frac{104}{3} - 12 \right] = 2\pi \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi \text{ u}^3.$$

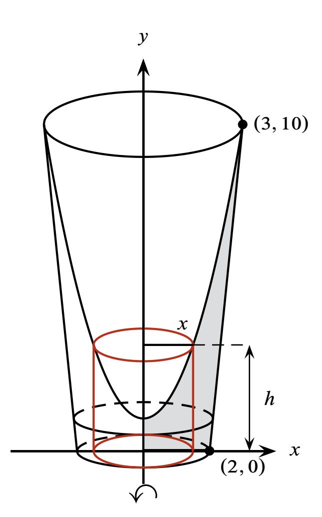
□

Ejemplo 3.3.15 *Calcular el volumen del sólido del ejemplo 3.3.13 usando cascarones cilíndricos*



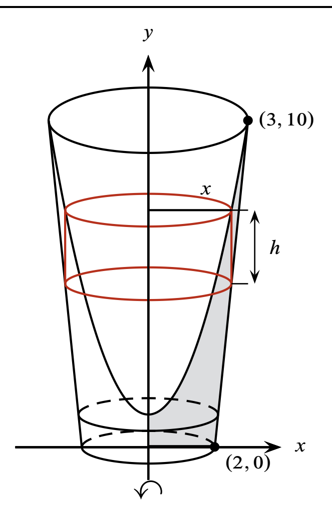
▼ El sólido se genera al rotar, alrededor del eje y, la región sombreada, limitada por la parábola $y = x^2 + 1$, por el eje y, por el eje x & por la recta $y = 10x - 20$. Al tomar los cascarones cilíndricos, el radio r de estos coincide con x y varía de 0 a 3; las correspondientes alturas h se definen en dos casos distintos:

1. Si $0 \le x \le 2$, entonces $h = x^2 + 1$.



2. Si $2 \le x \le 3$, entonces el segmento vertical es la diferencia entre la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = 10x - 20$, por lo tanto:

$$h = (x^2 + 1) - (10x - 20) = x^2 - 10x + 21.$$



Entonces el volumen es

$$V = \int_0^3 2\pi r h \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^3 x h(x) \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[\int_0^2 x(x^2+1) \, \mathrm{d}x + \int_2^3 x(x^2-10x+21) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= 2\pi \left[\int_0^2 (x^3+x) \, \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^3-10x^2+21x) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \right] \Big|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + 21\frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^3 = 2\pi \left[4 + 2 + \frac{81-16}{4} - 10\frac{27-8}{3} + 21\frac{9-4}{2} \right] =$$

$$= 2\pi \left(6 + \frac{65}{4} - \frac{190}{3} + \frac{105}{2} \right) = 2\pi \frac{72+195-760+630}{12} = \frac{137}{6}\pi \approx 71.733 \text{ u}^3,$$

esto es, el mismo resultado que obtuvimos antes, con un poco menos de esfuerzo.

□

Ejemplo 3.3.16 *Sea R la región del plano limitada por la recta $y - 2x = 0$ y la parábola $-x^2 + y = 0$. Utilice el método de Cascarones Cilíndricos para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de los siguientes ejes:*

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $x = 3$.
4. $y = 5$.
5. $x = -1$.
6. $y = -1$.

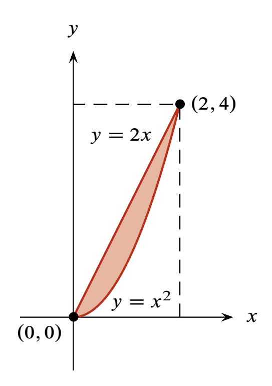
▼ Calculamos las intersecciones entra la recta $y = \ell(x) = 2x$ & la parábola $y = p(x) = x^2$.

$$\ell(x) = p(x) \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\&\; x = 2.$$

Los puntos de intersección en el plano son

$$P_1 = (0,0); \quad P_2 = (2,4).$$

Dibujamos la región R en el plano:

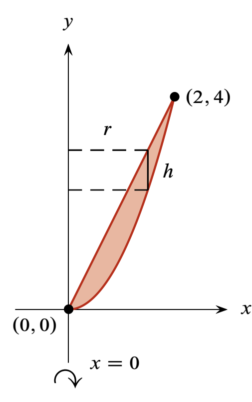


1. Eje de rotación $x = 0$.

   Para calcular el área lateral de un cascarón cilíndrico, se requiere calcular su altura h y su radio r (perpendicular al eje de rotación):

   a. La altura del cascarón cilíndrico es $h = \ell(x) - p(x) = 2x - x^2$.

   b. El radio del cascarón es $r = x$.



   Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi x \, [\ell(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi x \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi \left(2x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) \bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$

2. Eje de rotación $y = 0$.

   Para poder medir la altura h del cascarón, las funciones que definen a la región deben tener variable independiente y, es decir, de la forma $x = g(y)$. En este caso es fácil despejar la variable x de las ecuaciones de la recta y de la parábola para obtener explícitamente las funciones inversas. Veamos:

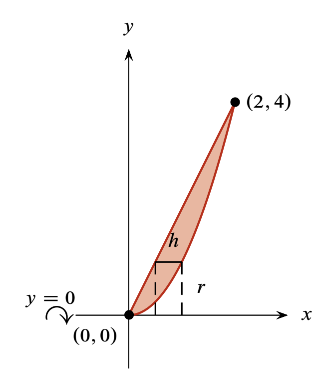
$$\ell(x) = y = 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}y = i\ell(y);$$
$$p(x) = y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y} = ip(y).$$

   La función $i\ell(y)$ es la inversa de la función $\ell(x)$, es decir, $i\ell[\ell(x)] = x$ & $\ell[i\ell(y)] = y$, como se puede comprobar haciendo la composicion de funciones. Lo mismo sucede con la otra función $p(x)$ y su función inversa $ip(y)$.

   R se encuentra entre las gráficas de las rectas $i\ell(y)$ & $ip(y)$ en el intervalo $[0, 4]$. Tenemos:

   a. El radio de un cascarón cilíndrico, perpendicular al eje de rotación $y = 0$ es $r = y$.

   b. La altura del cascarón cilíndrico es $h = ip(y) - i\ell(y) = \sqrt{y} - \dfrac{1}{2}y$.

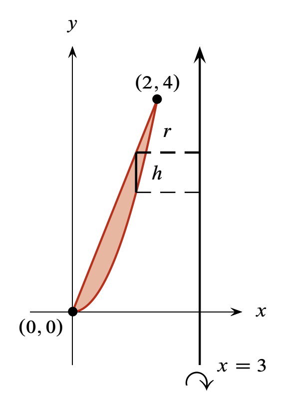


Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^4 2\pi y \, [ip(y) - i\ell(y)] \, \mathrm{d}y = \int_0^4 2\pi y \left(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 2\pi \left(y^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = 2\pi \left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{64}{15}\pi.$$

3. Eje de rotación $x = 3$.

   a. El radio del cascarón, $r = 3 - x$.
   b. La altura del cascarón, $\ell(x) - p(x) = 2x - x^2$.

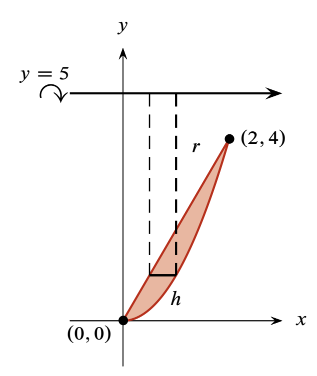


Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi(3 - x) \, [\ell(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi(3 - x) \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 2\pi \left(6x - 5x^2 + x^3\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(3x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

4. Eje de rotación $y = 5$.

   a. El radio del cascarón, $r = 5 - y$.
   b. La altura del cascarón, $ip(y) - i\ell(y) = \sqrt{y} - \dfrac{1}{2}y$.

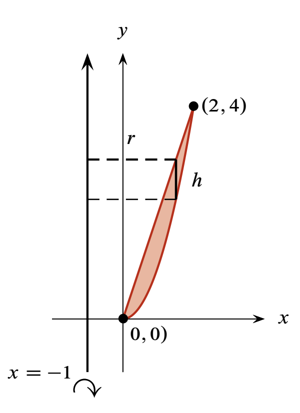


Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^4 2\pi(5 - y) \, [ip(y) - i\ell(y)] \, \mathrm{d}y = \int_0^4 2\pi(5 - y) \left(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 2\pi \left(5y^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}y - y\sqrt{y} + \frac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = 2\pi \left(\frac{10}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4}y^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{136}{15}\pi.$$

5. Eje de rotación $x = -1$.

   a. El radio del cascarón, $r = x - (-1) = x + 1$.
   b. La altura del cascarón, $\ell(x) - p(x) = 2x - x^2$.

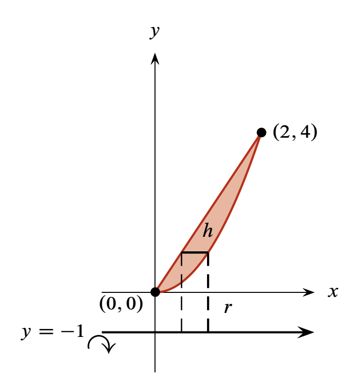


Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi(x+1)\,[\ell(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi(x+1)\left(2x - x^2\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 2\pi\left(2x + x^2 - x^3\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

6. Eje de rotación $y = -1$.

   a. El radio del cascarón, $r = y - (-1) = y + 1$.
   b. La altura del cascarón, $i\,p(y) - i\,\ell(y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y$.



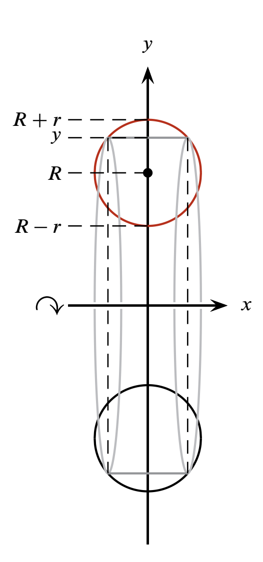
Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^4 2\pi(y+1)\,[i\,p(y) - i\,\ell(y)]\,\mathrm{d}y = \int_0^4 2\pi(y+1)\left(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 2\pi\left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y + y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y = 2\pi\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^4 = \frac{104}{15}\pi.$$

□

Ejemplo 3.3.17 *Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar un círculo de radio $r > 0$ alrededor de un eje situado a una distancia $R > r$ de su centro.*

▼ Este sólido es el toro del ejemplo 3.3.11; ahora usando el método de Cascarones Cilíndricos.



En este caso hemos tomado el eje x como el de revolución. El círculo tiene ecuación:

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2. \tag{3.2}$$

Al tomar una capa cilíndrica, para un segmento vertical con $R - r \le y \le R + r$ tenemos que el radio de la capa es el propio y, mientras que la altura h es lo que mide el segmento de $-x$ a x, donde x es el correspondiente valor que cumple (3.2), es decir:

$$x = \sqrt{r^2 - (y - R)^2}; \qquad -x = -\sqrt{r^2 - (y - R)^2};$$
$$h = x - (-x) = 2x = 2\sqrt{r^2 - (y - R)^2}.$$

Por lo tanto el volumen es

$$V = \int_{R-r}^{R+r} 2\pi y h \, dy = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} y\sqrt{r^2 - (y - R)^2} \, dy = \cdots = 2\pi^2 R r^2.$$

Resolver la integral anterior requiere de técnicas de sustitución trigonométrica que se vieron en el capítulo II. Aquí solamente indicamos el valor final y hacemos hincapié en que se obtiene el mismo resultado utilizando este método o el de las Arandelas.

□

Ejemplo 3.3.18 *Sea R la región del plano limitada por las rectas $y = -2x - 3$, $7x - y + 9 = 0$ & $4x - y + 2 = 0$. Utilice el método de Cascarones Cilíndricos para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de los ejes:*

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $x = 2$.
4. $y = 1$.
5. $x = -4$.
6. $y = -8$.

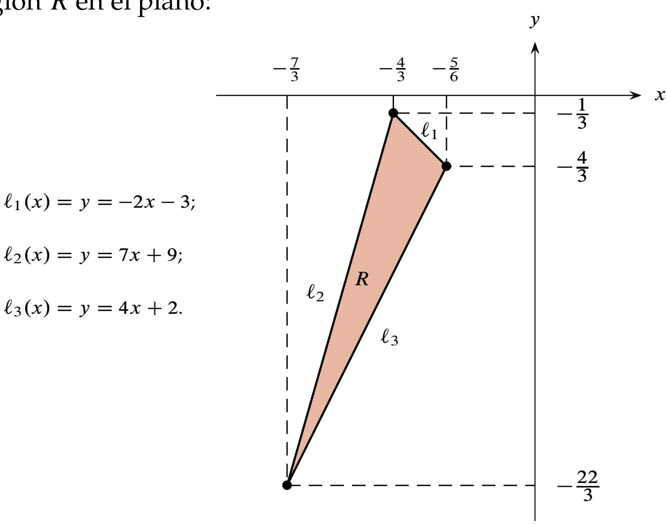
▼ Calculamos las intersecciones de las rectas $\ell_1(x) = -2x - 3$, $\ell_2(x) = 7x + 9$, $\ell_3(x) = 4x + 2$.

$$\ell_1(x) = \ell_2(x) \Rightarrow -2x - 3 = 7x + 9 \Rightarrow 9x = -12 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = \ell_1(x) = -\frac{1}{3}.$$
$$\ell_1(x) = \ell_3(x) \Rightarrow -2x - 3 = 4x + 2 \Rightarrow 6x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{6} \Rightarrow y = \ell_1(x) = -\frac{4}{3}.$$
$$\ell_2(x) = \ell_3(x) \Rightarrow 7x + 9 = 4x + 2 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \Rightarrow y = \ell_2(x) = -\frac{22}{3}.$$

Los puntos de intersección en el plano son

$$P_{12} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad P_{13} = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}\right), \quad P_{23} = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{22}{3}\right).$$

Dibujamos la región R en el plano:

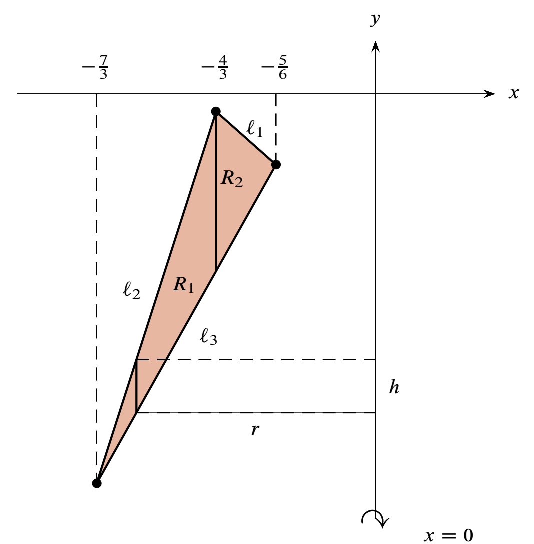


1. Eje de rotación $x = 0$.

   La región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2. Véase la siguiente figura.

   a. R_1 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_2(x)$ & $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right]$.

   b. R_2 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_1 x)$ & $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right]$.



Para calcular el área lateral de los cascarones cilíndricos, debemos tener en consideración:

a. El eje de un cascarón cilíndrico es el eje de rotación. En este caso el eje y ($x = 0$).
b. La altura h de un cascarón cilíndrico es un segmento, entre las curvas que definen la región, paralelo al eje de rotación.
c. El radio r de un cascarón cilíndrico es la distancia entre su altura h y el eje de rotación.

Por lo tanto:

a. En la región R_1, la altura es $h_1 = \ell_2(x) - \ell_3(x) = (7x + 9) - (4x + 2) = 3x + 7$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = \ell_1(x) - \ell_3(x) = (-2x - 3) - (4x + 2) = -6x - 5$.

c. El radio r en los dos casos es $0 - x = -x$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-x)[\ell_2(x) - \ell_3(x)] \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-x)(3x + 7) \, \mathrm{d}x =$$

$$= -2\pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} (7x + 3x^2) \, \mathrm{d}x = -2\pi \left(\frac{7}{2}x^2 + x^3 \right) \Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 5\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi(-x)[\ell_1(x) - \ell_3(x)] \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi(-x)(-6x - 5) \, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} (5x + 6x^2) \, \mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{5}{2}x^2 + 2x^3 \right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \tfrac{7}{4}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 5\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{27}{4}\pi.$$

2. Eje de rotación $y = 0$.

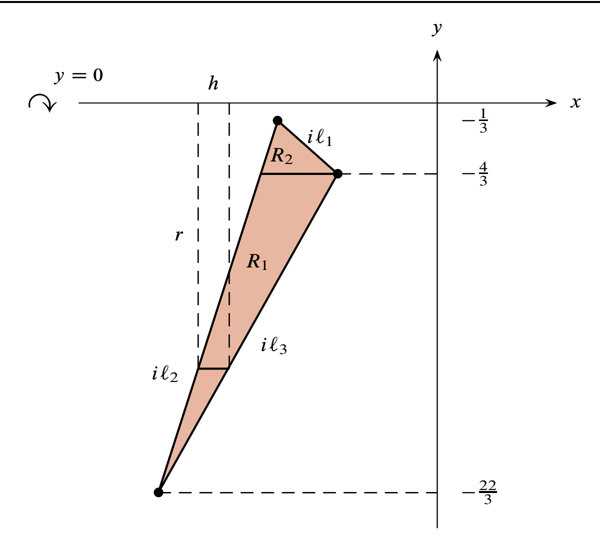
Para calcular el área de un cascarón cilíndrico observamos:

a. El eje de un cascarón cilíndrico es el eje de rotación. En este caso el eje x ($y = 0$).

b. La altura h de un cascarón cilíndrico es un segmento, entre las gráficas de las funciones que definen la región; dicho segmento es paralelo al eje de rotación. Es decir, perpendicular al eje y. La variable independiente de las funciones debe ser y.

$$\ell_1(x) = y = -2x - 3 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2}(y + 3) = i\ell_1(y);$$
$$\ell_2(x) = y = 7x + 9 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{7}(y - 9) = i\ell_2(y);$$
$$\ell_3(x) = y = 4x + 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{4}(y - 2) = i\ell_3(y).$$

c. El radio r de un cascarón cilíndrico es la distancia entre su altura h y el eje de rotación



Por lo tanto:

a. En la región R_1, la altura es $h_1 = i\ell_3(y) - i\ell_2(y) = \dfrac{1}{4}(y-2) - \dfrac{1}{7}(y-9) = \dfrac{3}{28}y + \dfrac{11}{14}$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = i\ell_1(y) - i\ell_2(y) = -\frac{1}{2}(y+3) - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{9}{14}y - \dfrac{3}{14}$.

c. El radio r en cada caso es $0 - y = -y$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi rh \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-y)\,[i\ell_3(y) - i\ell_2(y)] \, \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-y)\left(\frac{3}{28}y + \frac{11}{14}\right) \mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{1}{14}\pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(22y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{14}\pi\left(11y^2 + y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{90}{7}\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

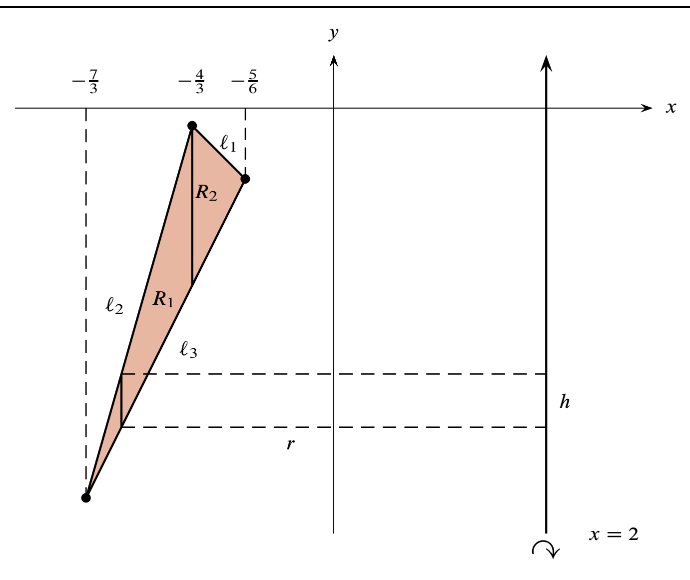
$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi rh \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi(-y)\,[i\ell_1(y) - i\ell_2(y)] \, \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi(-y)\left(-\frac{9}{14}y - \frac{3}{14}\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{3}{7}\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \left(y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{7}\pi\left(\frac{1}{2}y^2 - y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{14}\pi.$$

El volumen de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{90}{7}\pi + \frac{9}{14}\pi = \frac{27}{2}\pi.$$

3. Eje de rotación $x = 2$.

El razonamiento es similar al del inciso 1. pág. 42. Cambian los radios de los cascarones.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = \ell_2(x) - \ell_3(x) = (7x+9) - (4x+2) = 3x+7$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = \ell_1(x) - \ell_3(x) = (-2x-3) - (4x+2) = -6x-5$.

c. El radio r en cada caso es $2-x$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(2-x)\left[\ell_2(x) - \ell_3(x)\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi \,(2-x)\,(3x+7)\, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(14 - x - 3x^2\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(14x - \frac{1}{2}x^2 - x^3\right) \Bigg|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 11\pi.$$

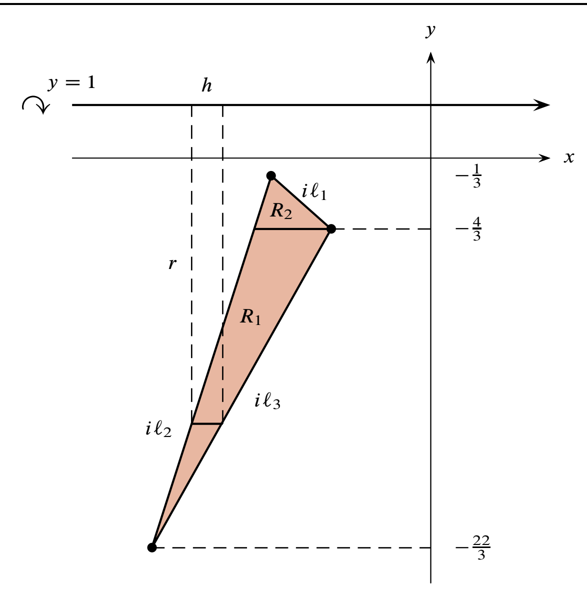
El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi\,(2-x)\left[\ell_1(x) - \ell_3(x)\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi\,(2-x)\,(-6x-5)\, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-10 - 7x + 6x^2\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(-10x - \frac{7}{x}x^2 + 2x^3\right) \Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{19}{4}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 11\pi + \frac{19}{4}\pi = \frac{63}{4}\pi.$$

4. Eje de rotación $y = 1$.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = i\ell_3(y) - i\ell_2(y) = \dfrac{1}{4}(y-2) - \dfrac{1}{7}(y-9) = \dfrac{3}{28}y + \dfrac{11}{14}$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = i\ell_1(y) - i\ell_2(y) = -\dfrac{1}{2}(y+3) - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{9}{14}y - \dfrac{3}{14}$.

c. El radio r en cada caso es $1 - y$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(1-y)\,[i\ell_3(y) - i\ell_2(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(1-y)\left(\frac{3}{28}y + \frac{11}{14}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{1}{14}\pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(-22 + 19y + 3y^2\right)\mathrm{d}y = -\frac{1}{14}\pi\left(-22y + \frac{19}{2}y^2 + y^3\right)\Bigg|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{117}{7}\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

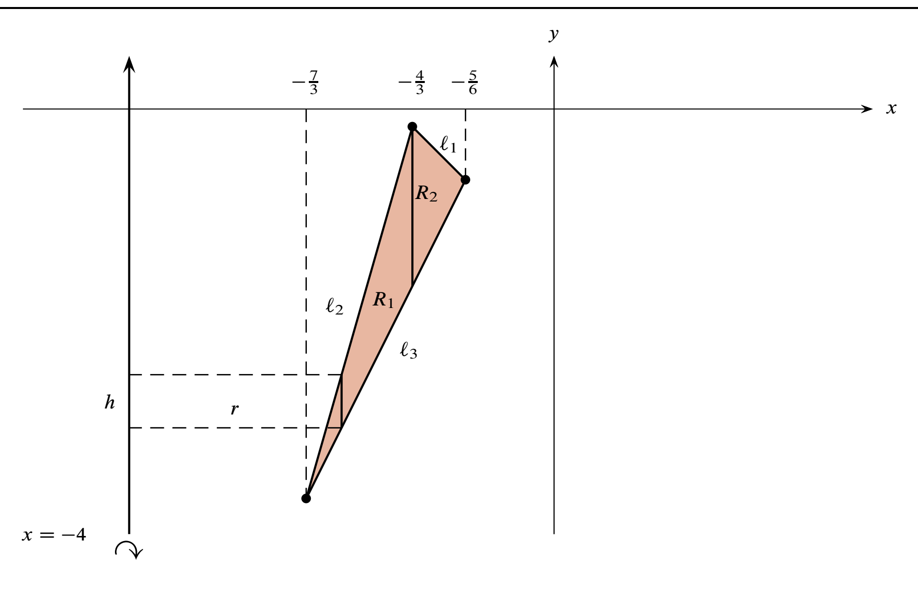
$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(1-y)\,[i\ell_1(y) - i\ell_2(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(1-y)\left(-\frac{9}{14}y - \frac{3}{14}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{3}{7}\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \left(-1 - 2y + 3y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{3}{7}\pi\left(-y - y^2 + y^3\right)\Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{7}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{117}{7}\pi + \frac{9}{7}\pi = 18\pi.$$

5. Eje de rotación $x = -4$.

El razonamiento es similar al del inciso 1. pág. 42. Cambian los radios de los cascarones.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = \ell_2(x) - \ell_3(x) = (7x+9) - (4x+2) = 3x+7$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = \ell_1(x) - \ell_3(x) = (-2x-3) - (4x+2) = -6x-5$.

c. El radio r en cada caso es $x - (-4) = x + 4$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(4+x)\,[\ell_2(x) - \ell_3(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(4+x)\,(3x+7)\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(28 + 19x + 3x^2\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(28x + \frac{19}{2}x^2 + x^3\right)\Bigg|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 7\pi.$$

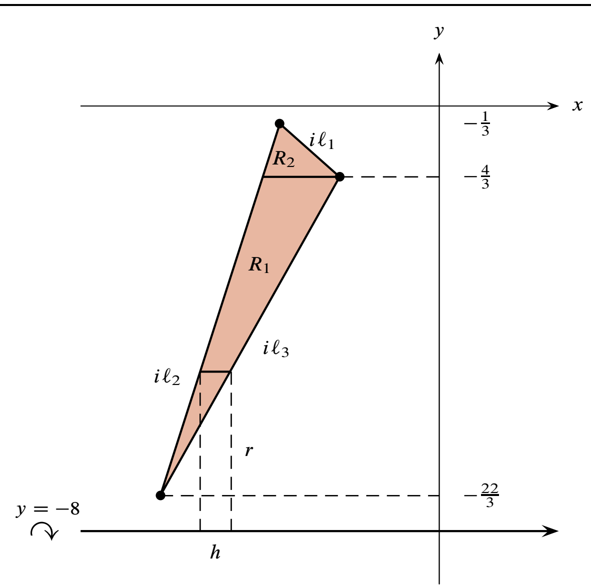
El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi\,(4+x)\,[\ell_1(x) - \ell_3(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi\,(4+x)\,(-6x-5)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -2\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(20 + 29x + 6x^2\right)\mathrm{d}x = -2\pi\left(20x + \frac{29}{2}x^2 + 2x^3\right)\Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{17}{4}\pi.$$

El volumen de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 7\pi + \frac{17}{4}\pi = \frac{45}{4}\pi.$$

6. Eje de rotación $y = -8$.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = i\ell_3(y) - i\ell_2(y) = \dfrac{1}{4}(y-2) - \dfrac{1}{7}(y-9) = \dfrac{3}{28}y + \dfrac{11}{14}$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = i\ell_1(y) - i\ell_2(y) = -\dfrac{1}{2}(y+3) - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{9}{14}y - \dfrac{3}{14}$.

c. El radio r en cada caso es $y - (-8) = y + 8$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(y+8)\,[i\ell_3(y) - i\ell_2(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(y+8)\left(\frac{3}{28}y + \frac{11}{14}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{14}\pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(176 + 46y + 3y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{14}\pi\left(176y + 23y^2 + y^3\right)\Bigg|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 18\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(y+8)\,[i\ell_1(y) - i\ell_2(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(y+8)\left(-\frac{9}{14}y - \frac{3}{14}\right)\mathrm{d}y =$$

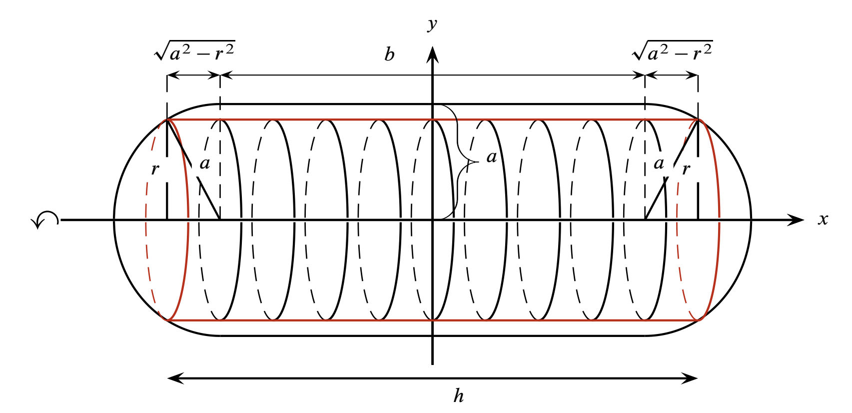
$$= -\frac{3}{7}\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \left(8 + 25y + 3y^2\right)\mathrm{d}y = -\frac{3}{7}\pi\left[8y + \frac{25}{2}y^2 + y^3\right]\Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\pi.$$

El volumen de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 18\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{45}{2}\pi.$$

□

Ejemplo 3.3.19 *Un tanque para almacenar gas tiene la forma de un cilindro circular recto de radio a, altura b, con una semiesfera del mismo radio en cada extremo. Calcular su volumen.*



▼ Podemos suponer que el eje x es el eje de rotación del tanque. Una capa cilíndrica a distancia r del eje de rotación se muestra en la figura.

- r varía desde 0 hasta a
- La altura h correspondiente del cilindro se calcula sumando b (la altura del cilindro original) con 2 segmentos que miden $\sqrt{a^2-r^2}$ (por el teorema de Pitágoras), por lo tanto:

$$h = b + 2\sqrt{a^2-r^2}.$$

El volumen del tanque es

$$V = \int_0^a 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^a 2\pi r(b + 2\sqrt{a^2-r^2}) \, \mathrm{d}r = \pi b \int_0^a 2r \, \mathrm{d}r + 2\pi \underbrace{\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}(2r \, \mathrm{d}r)}_{\boxed{u = a^2-r^2; \; \mathrm{d}u = -2r \, \mathrm{d}r.}} =$$

$$= \pi b r^2 \Big|_0^a - 2\pi \int_{a^2}^0 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \pi a^2 b + 2\pi \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} =$$

$$= \pi a^2 b + \frac{4}{3}\pi a^3.$$

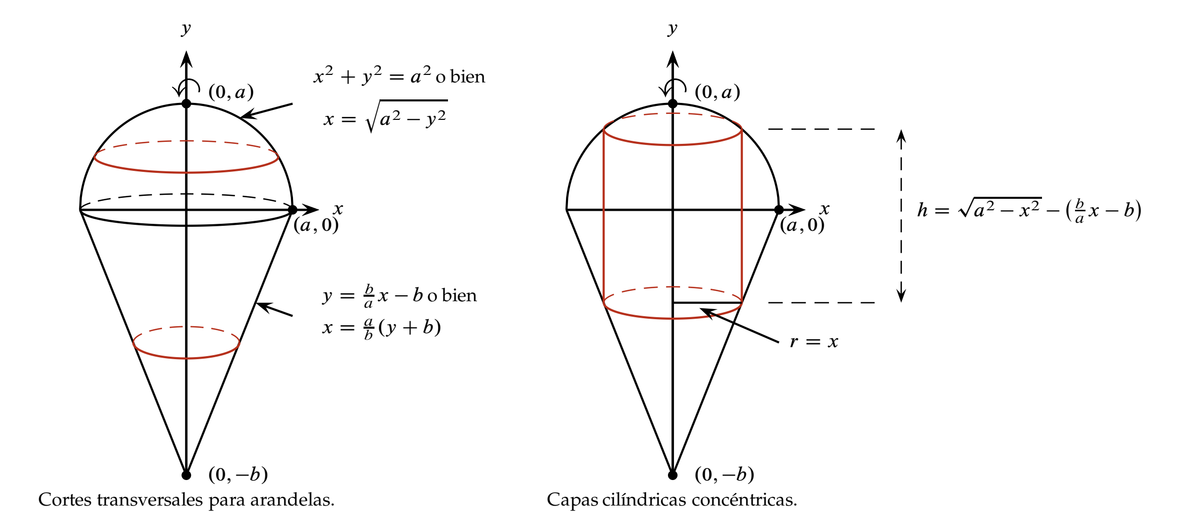
Lo anterior es la suma del volumen del cilindro original más el volumen de la esfera que forman las dos semiesferas de los extremos.

□

También podíamos haber usado el método de Arandelas, pero sería un poco más laborioso. Lo mas sensato en ejemplos de este tipo es usar la aditividad del volumen y partir el cálculo del sólido que se pide en el cálculo del volumen de un cilindro y una esfera (resultado de pegar las dos semiesferas de los extremos).
Alguna vez se preguntará el lector cuál de los métodos usados (el de Arandelas o el de Cascarones Cilíndricos) se debe utilizar para calcular el volumen de un sólido de revolución dado. La respuesta es que no hay un método que sea el mejor para todos los casos. Si se decide aplicar uno de ellos, lo más seguro es que se pueda plantear la integral correspondiente determinando los límites de integración y la función integrando adecuada; si la integral por calcular resulta demasiado laboriosa, o no se puede resolver con las técnicas de integración desarrollada hasta ahora, puede ser buena idea intentar el otro método para ver si con él es posible completar el cálculo.
Cerramos esta sección con un ejemplo sencillo en el que aplicamos los dos métodos de cálculo de volumen de un sólido de revolución, para que el lector los pueda comparar una vez más.

Ejemplo 3.3.20 *Un sólido tiene la forma de un cono circular recto de radio a, altura b; coronado por una semiesfera de radio a (como un barquillo de nieve). Calcular su volumen usando el método de Arandelas y el de Cascarones Cilíndricos.*

▼ El sólido se genera al girar el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,-b)$ y $(a,0)$ y al girar el cuarto de círculo $x^2+y^2 \le a^2$ del primer cuadrante alrededor del eje y; véase la siguiente figura:



Cortes transversales para arandelas. Capas cilíndricas concéntricas.

1. Cálculo por el método de Arandelas:

$$V=\int_{-b}^{a}A(y)\,dy=\int_{-b}^{0}\pi\left[\frac{a}{b}(y+b)\right]^2 dy+\int_{0}^{a}\pi\left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^2 dy=$$
$$=\frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{0}(y+b)^2\,dy+\pi\int_0^a\left(a^2-y^2\right)dy=$$
$$=\frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b u^2\,du+\pi\left(a^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a=$$
$$=\frac{\pi a^2}{b^2}\cdot\frac{b^3}{3}+\pi\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{\pi a^2}{3}(b+2a).$$

$u=y+b$; $du=dy$.

2. Cálculo por el método de Cascarones Cilíndricos:

$$V=\int_0^a 2\pi r h\,dr=\int_0^a 2\pi x\left[\sqrt{a^2-x^2}-\left(\frac{b}{a}x-b\right)\right]dx=$$
$$=\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot 2x\,dx-2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}x^2-bx\right)dx=$$
$$=\pi\int_{a^2}^{0}-\sqrt{u}\,du-2\pi\left(\frac{bx^3}{3a}-\frac{bx^2}{2}\right)\Big|_0^a=$$
$$=\pi\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^{a^2}-2\pi\left(\frac{ba^2}{3}-\frac{ba^2}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(a^3\right)-2\pi\left(\frac{-a^2b}{6}\right)=$$
$$=\frac{\pi a^2}{3}(2a+b).$$

$u=a^2-x^2$; $du=-2x\,dx$.

Observe que ambos procedimientos arrojan el mismo resultado, que también puede verse como la suma del volumen de un cono $\left(\dfrac{\pi a^2 b}{3}\right)$ y el de una semiesfera $\left(\dfrac{2\pi a^3}{3}\right)$.

□

Ejercicios 3.3.3 *Volúmenes.* *Soluciones en la página 52*

1. Sea R la región del plano delimitada por la curva $y = \operatorname{sen} 2x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 3$.
   d. $x = 4$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -1$.

2. Sea R la región del plano delimitada por las parábolas $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = (x-6)^2$ y la recta $y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 4$.
   d. $x = 6$.
   e. $y = -1$.
   f. $x = -2$.

3. Sea R la región del plano delimitada por $y = e^x$, $y = e^{5-x}$ & $x = 3$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 20$.
   d. $x = 6$.
   e. $y = -1$.
   f. $x = -2$.

4. Sea R la región del plano delimitada por $y = x^3$, $y = -(x-10)^3$ y la recta $y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 130$.
   d. $x = 11$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -1$.

5. Sea R la región del plano delimitada por $y = -x^2 + 8x - 3$ & $y = |x-4| + 1$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 13$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = 8$.
   e. $x = -1$.

6. Sea R la región del plano delimitada por por $y = 4 - e^{-x}$, $y = 4 - e^x$ & $x = 1$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 4$.
   d. $x = 1$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -2$.

7. Sea R la región del plano delimitada por $y = 2 - \cos x$ & $y = 1$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = -2$.
   e. $y = 3$.
   f. $x = 7$.

Ejercicios 3.3.1 *Volúmenes.* *Preguntas, página 9*

1. a. 666.667.
   b. 288.675.
   c. 166.667.
2. a. 59.6285.
   b. 14.9071.
   c. 14.9071.
3. a. 0.1286.
   b. 0.04546.
   c. 0.1010.
4. a. 1.5708.
   b. 0.429204.
   c. 0.61685.

Ejercicios 3.3.2 *Volúmenes.* *Preguntas, página 31*

1. a. 252.481.
   b. 87.0624.
   c. 339.543.
   d. 174.125.
   e. 400.487.
   f. 130.594
2. a. 33.5103.
   b. 26.8083.
   c. 50.2655.
   d. 43.5634.
   e. 67.0206.
   f. 73.7227.
3. a. 2.0944.
   b. 4.1888.
   c. 8.37758.
   d. 10.472.
   e. 7.33038.
   f. 5.23599.
4. a. 29.6088.
   b. 187.522.
   c. 9.8696.
5. a. 22.436.
   b. 22.436.
   c. 56.5209.
6. a. 127.902.
   b. 98.2929.
   c. 59.2176.
   d. 96.9167.
   e. 91.5788.
7. a. 2.25655.
   b. 13.1775.
   c. 31.9903.
   d. 13.1775.
   e. 36.4155.
   f. 25.7439.
8. a. 2.4674.
   b. $\dfrac{1}{4}\pi(8+3\pi)$.
   c. 16.3822.
   d. 6.28319.
   e. 12.5664.
   f. 6.28319.

Ejercicios 3.3.3 *Volúmenes.* *Preguntas, página 51*

1. a. 2.4674.
   b. 4.9348.
   c. 28.0311.
   d. 20.1979.
   e. 34.773.
   f. 11.218.
2. a. 305.363.
   b. 175.929.
   c. 160.85.
   d. 125.664.
   e. 129.434.
   f. 276.46.
3. a. 547.942.
   b. 55.3852.
   c. 137.551.
   d. 61.8441.
   e. 272.752.
   f. 94.4617.
4. a. 70 124.8.
   b. 9 817.48.
   c. 345 800.
   d. 11 781.
   e. 74 177.5.
   f. 11 781.

5. a. 2 689.83.
   b. 1 446.56.
   c. 2 734.77.
   d. 1 367.86.
   e. 1 808.2.

6. a. 18.6205.
   b. 4.62291.
   c. 8.67769.
   d. 2.20164.
   e. 32.2696.
   f. 18.272.

7. a. 93.0484.
   b. 130.854.
   c. 151.095.
   d. 211.755.
   e. 51.1587.
   f. 152.302.

CAPÍTULO

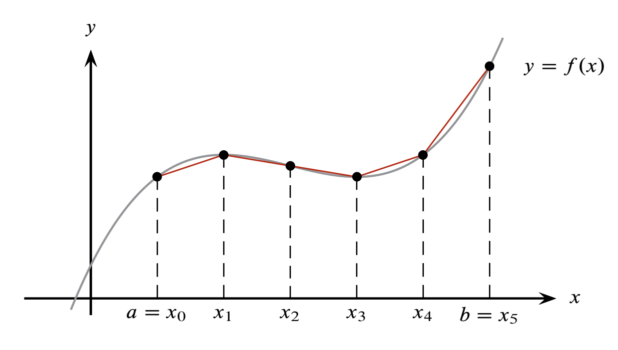
3

Aplicaciones

1

3.4 Longitud de curvas

Entre los problemas que dieron origen a la integral, mencionamos en el capítulo 1 el de calcular la longitud de una curva, dada como la gráfica de una función $y = f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$.



Para aproximar el valor de la longitud de la curva, tomamos una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Después con los puntos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$, ..., $[x_n, f(x_n)]$ se traza una línea poligonal cuya longitud se calcula como la suma de longitudes de los segmentos desde $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ hasta $[x_i, f(x_i)]$ en donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y se suman dichas longitudes como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i. \tag{3.1}$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

En esta última suma $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; x_i^* denota un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para el cual se cumple el teorema del Valor Medio para derivadas, es decir:

$$f'(x_i^*) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Es preciso subrayar que la función $f(x)$, de la que deseamos calcular la longitud de curva, debe tener derivada continua en (a, b).
Como vemos, la suma en (3.1) es una suma de Riemann que aproxima la siguiente integral:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

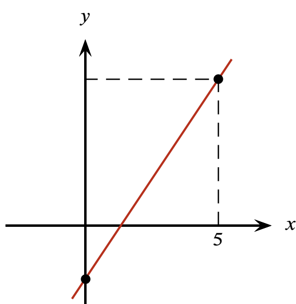
En conclusión:

- Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ con derivada continua en (a, b), entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$L(f, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x\,. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.4.1 *Si* $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$, *calcular la longitud de* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[0, 5]$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$ es claramente continua en el intervalo y su derivada $f'(x) = \dfrac{3}{2}$ también. Por lo tanto:



$$L(f, [0, 5]) = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{13}{4}} \int_0^5 \mathrm{d}x = \frac{5\sqrt{13}}{2}.$$

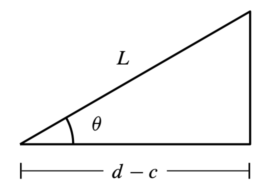
□

Ejemplo 3.4.2 *Si* $f(x) = mx + b$, *calcular la longitud de* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[c, d]$.

▼ La función $f(x) = mx + b$ es continua y tiene por gráfica una recta; su derivada es $f'(x) = m$, también continua en cualquier intervalo, por lo tanto:

$$L(f, [c, d]) = \int_c^d \sqrt{1 + m^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{1 + m^2} \int_c^d \mathrm{d}x = \sqrt{1 + m^2}(d - c).$$

Observe que $d - c$ es la longitud del cateto horizontal en el triángulo que se muestra. Si θ denota el ángulo de inclinación de la recta, entonces:



$$\frac{L}{d-c} = \sec\theta, \text{ o bien } L = (d-c)\sec\theta.$$

En la ecuación de la recta $y = mx + b$, la pendiente m es precisamente la tangente del ángulo de inclinación, $m = \tan\theta$; por una identidad trigonométrica conocida:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{1+m^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|\,,$$

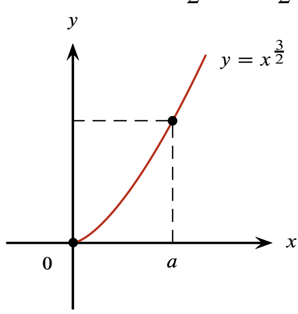
así que la longitud obtenida con la integral concuerda con esta observación:

$$L(f, [c, d]) = \sqrt{1+m^2}(d-c) = (d-c)\sec\theta.$$

□

Ejemplo 3.4.3 *Para la función $y = x^{\frac{3}{2}}$ determine la longitud de curva desde $x = 0$ hasta $x = a > 0$.*

▼ Observe que la curva no está definida para valores negativos de x, pues $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, pero es la gráfica de una función continua en $[0, a]$ cuya derivada $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ es también continua en $[0, a]$.



Por la fórmula (3.2) obtenemos:

$$L(f, [0, a]) = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \underbrace{\int_0^a \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx}_{\boxed{u = 1 + \frac{9x}{4};\quad du = \frac{9}{4}\,dx}} =$$

$$= \int_1^{1+\frac{9a}{4}} \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}\, du = \frac{4}{9}\int_1^{1+\frac{9a}{4}} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{4}{9}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{1+\frac{9a}{4}} = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9a}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

□

Ejemplo 3.4.4 *Calcular la longitud del arco de curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.*

▼ La función $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ tiene la derivada $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2}(x^2 - x^{-2})$, que es continua en el intervalo $[1, 3]$, por lo que podemos usar la fórmula (3.2) para obtener la longitud de arco deseada. Primero,

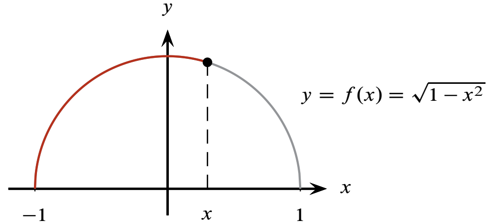
$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \left[\frac{1}{2}(x^2 - x^{-2})\right]^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^2 - x^{-2})^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^4 - 2x^2x^{-2} + x^{-4}) =$$
$$= \frac{4 + x^4 - 2 + x^{-4}}{4} = \frac{x^4 + 2 + x^{-4}}{4} = \frac{x^4 + 2x^2x^{-2} + x^{-4}}{4} = \frac{(x^2 + x^{-2})^2}{4};$$

Por lo tanto la longitud es

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{\frac{(x^2 + x^{-2})^2}{4}}\, dx = \int_1^3 \frac{x^2 + x^{-2}}{2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^3}{3} - 3^{-1}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^{-1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[9 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(10 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{3} = \frac{14}{3}.$$

□

Ejemplo 3.4.5 *La función $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tiene por gráfica la semicircunferencia superior de radio 1 con centro en el origen, y está definida para $-1 \le x \le 1$.*



Calcular la longitud de esta curva.

▼ La función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en todo el intervalo $[-1, 1]$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

que es continua en $(-1, 1)$. Podemos entonces aplicar la fórmula (3.2) para el intervalo $[-1, 1]$:

$$L(f, [-1, 1]) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx =$$
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Calculamos esta integral impropia dando un $\epsilon > 0$ e integrando en el intervalo $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$.

$$\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x \Bigg|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} = \operatorname{arcsen}(1 - \epsilon) - \operatorname{arcsen}(-1 + \epsilon) = g(\epsilon).$$

Cuando $\epsilon \to 0^+$ sucede:

$$\begin{cases} 1 - \epsilon \to 1^- & \Rightarrow \operatorname{arcsen}(1 - \epsilon) \to \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}; \\ -1 + \epsilon \to -1^+ & \Rightarrow \operatorname{arcsen}(-1 + \epsilon) \to \operatorname{arcsen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Luego entonces,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} g(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\operatorname{arcsen}(1-\epsilon) - \operatorname{arcsen}(-1+\epsilon)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{\text{converge a}} \pi \Rightarrow$$

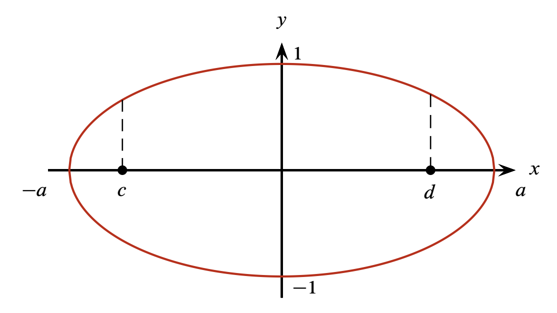
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Por lo tanto, la longitud de la semicircunferencia $y = \sqrt{1-x^2}$ con $-1 \le x \le 1$ es

$$L(f, [-1,1]) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

□

Ejemplo 3.4.6 *Para la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$, *escribir la fórmula para encontrar la longitud de la porción de la curva entre* $x = c$ & $x = d$, *donde* $-a \le c < d \le a$.



▼
Como necesitamos una función $y = f(x)$, despejaremos de la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Podemos tomar la raíz positiva para tener una función, pues el análisis para la raíz negativa es similar. Por lo tanto

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

es continua en $[-a, a]$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{-x}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

que es también continua en $(-a, a)$. De aquí:

$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^2(a^2-x^2)+x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 - a^2x^2 + x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 + (1-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}.$$

Entonces,

$$L(f; [c,d]) = \int_c^d \sqrt{\frac{a^4 + (1-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_c^d \sqrt{\frac{a^4 + (1-a^2)x^2}{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Esta integral, que no puede ser evaluada por métodos elementales, pertenece a la clase de *integrales elípticas*.

□

Ejercicios 3.4.1 *Longitud de arco.* *Soluciones en la página 7*

1. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}$, desde $x = \sqrt{2}$ hasta $x = \sqrt{7}$.
2. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, desde $x = 1$ hasta $x = 4$.
3. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.
4. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.
5. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{8}x^{\frac{4}{5}}$, desde $x = 1$ hasta $x = 32$.
6. Calcular la longitud de arco de la curva $9y^2 = 4\left(1+x^2\right)^3$, en el primer cuadrante, desde el punto donde $x = 0$ hasta el punto donde $x = 2\sqrt{2}$.
7. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{5}{48}\left(4x^{\frac{4}{5}}+1\right)^{\frac{3}{2}}$, desde $x = \frac{1}{32}$ hasta $x = 1$.
8. Determinar la longitud de arco de la curva $f(x) = \int_1^x \sqrt{t+1+\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$, con $1 \leq x \leq 4$.
9. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, con $1 \leq x \leq 2$.

Ejercicios 3.4.1 *Longitud de arco.* *Preguntas, página 6*

1. 6.46215 u.
2. 5.16667 u.
3. 8.83333 u.
4. 3.84375 u.
5. 53.4236 u.
6. 17.9134 u.
7. 1.40625 u.
8. 6.66667 u.
9. 3.24583 u.

CAPÍTULO

3

Aplicaciones

[1]

3.5 Trabajo de una fuerza

Se dice que una fuerza realiza un trabajo cuando cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. En este sentido, el trabajo que realiza una fuerza para llevar a cabo una tarea, comúnmente denotado por la letra W, representa la energía necesaria para realizarla. El trabajo representa la cantidad total de esfuerzo necesario para realizar alguna tarea.
Este apartado trata primero sobre el trabajo que realiza una fuerza constante como, por ejemplo, la fuerza para mover hacia arriba un objeto o la fuerza para deslizarlo horizontalmente. Tambien trata sobre el trabajo que realiza una fuerza variable, como la fuerza que permite comprimir o estirar un resorte, así como el trabajo que se realiza para extraer el fluido de un tanque.

3.5.1 Trabajo realizado por una fuerza constante

Si se desea levantar un objeto desde el piso hasta una altura h, se requiere de una fuerza F cuya magnitud es el peso del objeto. Para diferentes alturas, la fuerza que se requiere es la misma, es decir, la fuerza es constante.
Por definición, si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F entonces el trabajo W realizado por la fuerza se define por:

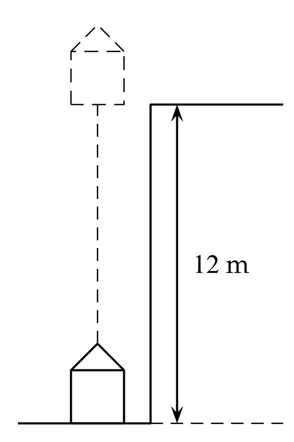
$$W = FD.$$

Cuando la fuerza F y la distancia D se expresan en newtons (N) y metros (m), respectivamente, la unidad del trabajo W es el newton-metro y se llama joule (J).
Cuando la fuerza F se expresa en libras y la distancia D en pies, la unidad del trabajo W es la libra-pie.

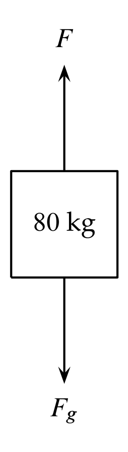
$$1 \text{ libra-pie } \approx 1.36 \text{ J}$$

Ejemplo 3.5.1 *¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza al levantar una caja de* 80 *kg de masa desde el nivel del piso hasta la parte superior de un edificio que tiene* 12 *m de altura?*

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017



▼ La fuerza F que se requiere para levantar la caja es exactamente igual, en magnitud y dirección, a la fuerza de atracción gravitacional F_g que actúa sobre esta, pero con sentido opuesto



Esto es

$$F = F_g = mg = (80 \text{ kg}) \left(9.8 \text{ m/s}^2\right) = 784 \text{ N}.$$

El trabajo W que realiza la fuerza F al levantar la caja una distancia $D = 12$ m es

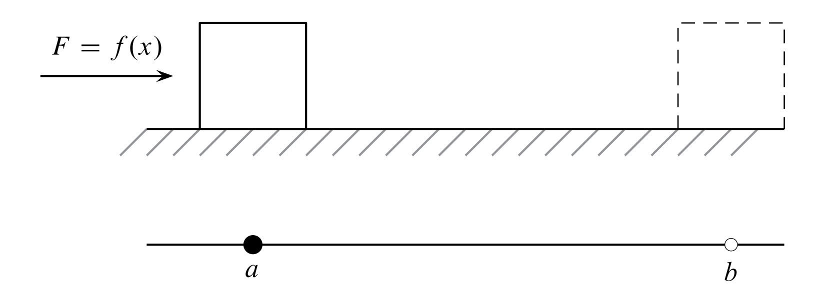
$$W = FD = (784 \text{ N})(12 \text{ m}) = 9\,408 \text{ J} = 9.408 \text{ kJ};$$

9.408 kJ representa la energía necesaria para realizar dicha tarea. □

3.5.2 Trabajo realizado por una fuerza variable

Consideremos que sobre un cuerpo, apoyado en una superficie horizontal, actúa una fuerza continua y variable $f(x)$, provocando que dicho cuerpo se desplace en línea recta. Aquí, la fuerza $f(x)$ depende de la posición x del cuerpo.

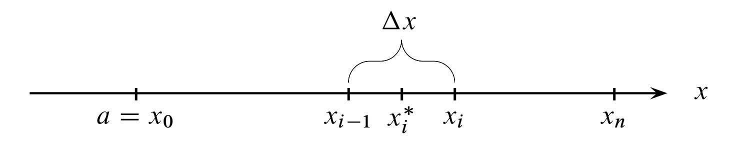
Como se puede observar en la parte inferior de la siguiente figura, el cuerpo está representado por un punto en una recta horizontal y se desplaza desde a hasta b.



Para calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x)$ al desplazar el cuerpo, no se puede emplear la expresión $W = FD$ descrita anteriormente ya que, en este caso, para cada punto x en el intervalo $[a, b]$, $F = f(x)$ es variable.
¿Cómo se puede calcular el trabajo que realiza la fuerza continua y variable $f(x)$?
Para contestar esta pregunta es necesario realizar el análisis que se muestra a continuación.
Se divide el intervalo $[a, b]$ en n-subintervalos, todos ellos con la misma longitud Δx, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

En la siguiente figura se muestra el i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
x_i^* es un punto cualquiera en dicho intervalo y la fuerza sobre el cuerpo en ese punto es $f(x_i^*)$.



Observación. Si el número n de subintervalos tiende a ser muy grande, entonces $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ tiende a ser muy pequeña. En este caso los valores de x_{i-1} y x_i se encontrarían muy cerca uno del otro, por lo que el valor de $f(x_i^*)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ no variaría mucho. Se puede decir que $f(x_i^*)$ sería casi constante en dicho subintervalo.
Considerando lo anterior, el trabajo W_i que realiza la fuerza $f(x_i^*)$ al mover el objeto desde x_{i-1} hasta x_i es, aproximadamente:

$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x.$$

Por otra parte, considerando los n subintervalos en $[a, b]$ se puede decir que el trabajo W que realiza la fuerza $F = f(x)$ al mover el objeto desde a hasta b es, aproximadamente:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

La aproximación de W se mejora cuando el número de subintervalos n tiende a ser muy grande, y por tanto la longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ tiende a ser muy pequeña. Es decir,

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Esta última igualdad es una suma de Riemann. Y como vimos en el capítulo 1:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\, dx; \tag{3.1}$$

que representa el trabajo realizado por la fuerza variable $f(x)$ al mover un objeto desde el punto a hasta el punto b.

Ejemplo 3.5.2 *En la siguiente figura se encuentra un cuerpo en reposo sobre una superficie plana. Debido a la acción de una fuerza variable y continua $F = f(x) = x^3 + 1$, cuya magnitud está dada en newtons, el cuerpo se desplaza en línea recta desde la posición a hasta la posición b. Considerando que no existe fuerza de rozamiento entre la superficie y el cuerpo, y que la fuerza actúa en el sentido del movimiento de éste, ¿cuál es el trabajo que realiza la fuerza $f(x)$ para desplazar el cuerpo?*



▼ En este ejercicio la fuerza $F = f(x) = x^3 + 1$ provoca que el cuerpo se desplace desde $a = 0$ m hasta $b = 5$ m, es decir, una distancia de 5 m.
Considerando la definición del trabajo W (3.1) realizado por una fuerza variable $f(x)$, y usando la información de este ejercicio:

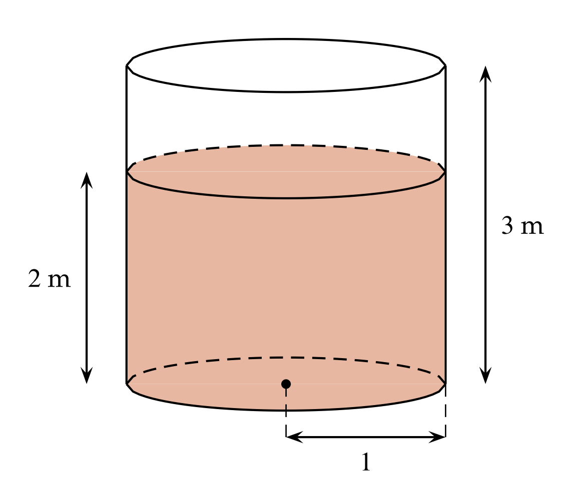
$$W = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow W = \int_0^5 (x^3 + 1)\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = \frac{(5)^4}{4} + 5 = \frac{645}{4}.$$

Las unidades de la fuerza que actúa sobre el cuerpo y la distancia que este se desplaza son newtons y metros, respectivamente, entonces el trabajo W realizado por la fuerza F es de $\frac{645}{4}$ joules (J) = 161.25 J.

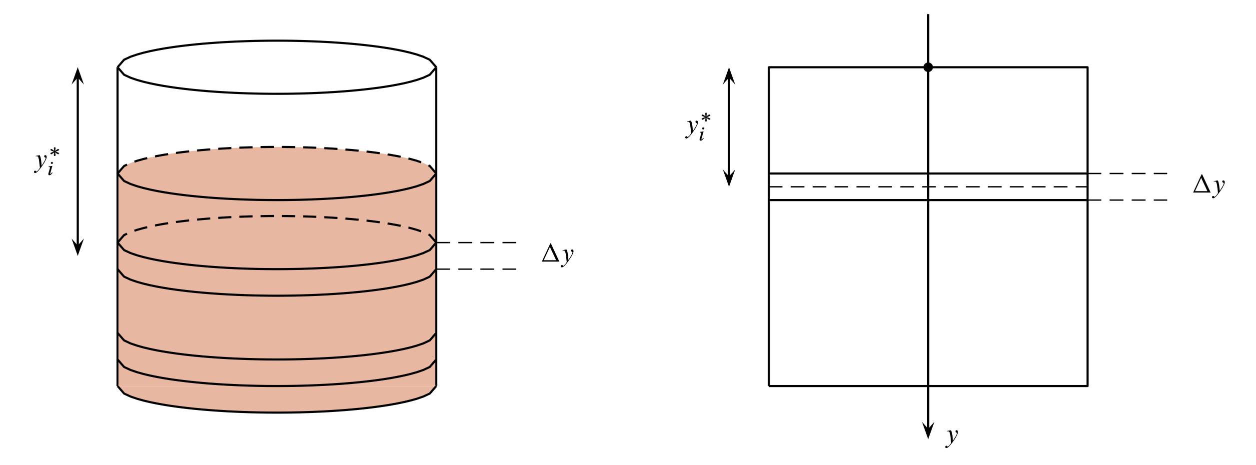
□

3.5.3 Trabajo realizado para extraer el fluido de un tanque

Ejemplo 3.5.3 *Un recipiente cilindrico con base circular que contiene agua tiene un radio y una altura de 1 y 3 metros respectivamente. Si el agua en el interior del recipiente tiene una altura de 2 metros, ¿cuál es el trabajo requerido para bombear toda el agua hasta la parte superior del recipiente? (Considere que la densidad del agua es 1 000 kg/m^3).*



▼ Para resolver este ejercicio tendremos en cuenta un conjunto de n capas de líquido, cada una con un mismo grosor Δy, como se muestra en la siguiente figura en la cual se resalta la i-ésima capa de líquido a una distancia y_i^* con respecto de la parte superior del recipiente. Observe que el eje vertical coordenado y tiene su origen en la parte superior del recipiente y el sentido positivo hacia abajo.



Si el número n de capas tiende a ser muy grande, entonces el grosor Δy de cada capa tiende a ser muy pequeño. En este caso el trabajo W_i que realiza la fuerza F_i al elevar hasta la parte superior del recipiente la i-ésima capa es

$$W_i = F_i y_i^*.$$

La fuerza F_i debe ser igual a la fuerza de atracción gravitacional que actúa sobre la i-ésima capa, esto es:

$$F_i = m_i g; \tag{3.2}$$

donde m_i es la masa de un pequeño cilindro de altura Δy, es decir:

$$m_i = (\text{densidad del líquido})\,(\text{volumen de la } i\text{-ésima capa}) \quad \& \quad g = \text{aceleración de la gravedad}.$$

Considerando que el radio de la i-ésima capa es igual al radio del recipiente, el cálculo de m_i es

$$m_i = (1\,000)(\pi r^2 \Delta y) \Rightarrow m_i = (1\,000)(\pi (1)^2 \Delta y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_i = 1\,000\pi \Delta y.$$

Sustituimos en 3.2:

$$F_i = m_i g = (1\,000\pi \Delta y)(9.8) \Rightarrow F_i = 9\,800\pi \Delta y.$$

Con lo anterior

$$W_i = F_i \cdot y_i^* \Rightarrow W_i = 9\,800\pi \cdot y_i^* \cdot \Delta y.$$

El trabajo total que se requiere para elevar a la parte superior del recipiente todo el líquido, es decir, las n capas, es aproximadamente

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i y_i^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} 9\,800\pi \cdot y_i^* \cdot \Delta y.$$

La aproximación de W se mejora cuando el número n de capas tiende a ser muy grande, y por lo tanto la longitud Δx tiende a ser muy pequeña. Por esto decimos que

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 9\,800\pi \cdot y_i^* \cdot \Delta y.$$

En el lado derecho de esta última expresión se tiene una suma de Riemann. Recordando lo visto en el capítulo 1:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 9\,800\pi \cdot y_i^* \cdot \Delta y \;\Rightarrow\; W = \int_1^3 9\,800\pi\, y\, \mathrm{d}y.$$

En el eje coordenado y, la altura del nivel del líquido está en 1 y la base del recipiente está en 3. Es por esto que el límite de integración inferior es 1 y el superior es 3. Resolviendo la integral:

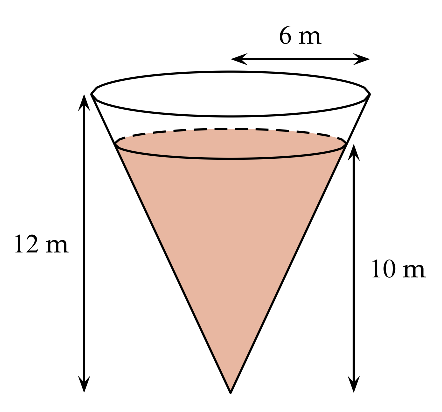
$$\int_1^3 9\,800\pi\, y\, \mathrm{d}y = 9\,800\pi \int_1^3 y\, \mathrm{d}y = 9\,800\pi \left(\frac{y^2}{2} \bigg|_1^3 \right) = 9\,800\pi \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) =$$

$$= 9\,800 \cdot \pi \cdot 4 = 39\,200\pi \approx 123.15 \text{ kJ}.$$

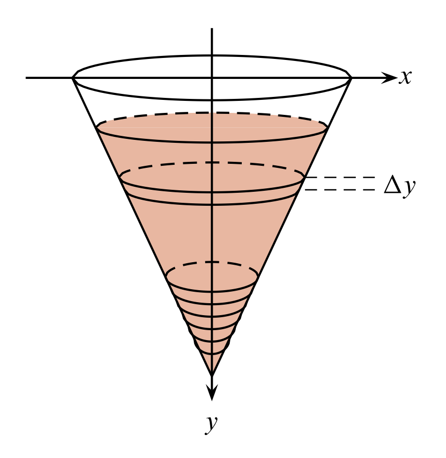
□

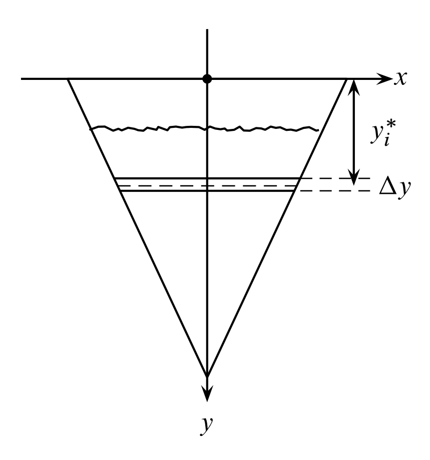
En el ejemplo anterior, cada una de las capas de líquido consideradas, con un mismo grosor Δy, tiene un mismo volumen por las características del recipiente que las contiene.
Ahora, el siguiente ejemplo presenta un recipiente con características diferentes, cada una de las capas consideradas tiene un volumen diferente.

Ejemplo 3.5.4 *El cono circular de la siguiente figura almacena agua. La altura del cono es de 12 m y su radio de la parte superior es de 6 m.*
El nivel del líquido contenido por el recipiente tiene una altura de 10 m. ¿Cuál es el trabajo que se requiere para bombear todo el líquido hasta la parte superior del cono? (Densidad del agua: 1 000 kg/m³).



▼ Al igual que en el ejercicio anterior se considerará un conjunto de n capas de líquido, cada una con un mismo grosor Δy.
También, se considerará que el origen del eje vertical coordenado y está en la parte superior del recipiente, como se puede observar en la siguiente figura, con el sentido positivo hacia abajo.





Si el número n de capas tiende a ser muy grande, el grosor Δy de estas tenderá a ser muy pequeño; por lo que el trabajo W_i que realiza la fuerza F_i al elevar la i-ésima capa hasta la parte superior del cono circular es

$$W_i = F_i\, y_i^*;$$

donde

$$F_i = \text{fuerza de atracción gravitacional sobre la } i\text{-ésima capa} = m_i\, g.$$

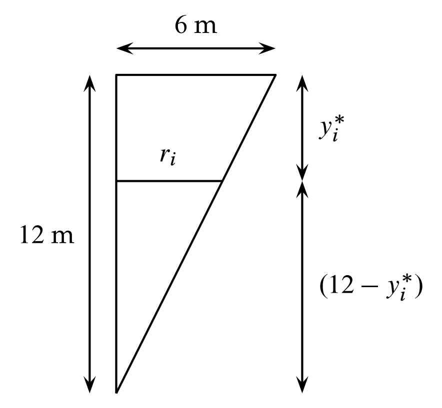
Además, la masa m_i de la i-ésima capa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad del líquido})(\text{volumen de la } i\text{-ésima capa});\\ g &= \text{aceleración de la gravedad.} \end{aligned}$$

Dado que el grosor Δy de cada capa es muy pequeño, se aproximará el volumen V_i de la i-ésima capa como si fuera el de un cilindro circular con radio r_i, es decir,

$$V_i = \pi (r_i)^2 \Delta y.$$

A partir de los triángulos semejantes de la siguiente figura, calcularemos r_i:



Por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{6}{12} = \frac{r_i}{(12 - y_i^*)} \Rightarrow \frac{6(12 - y_i^*)}{12} = r_i \Rightarrow r_i = \frac{12 - y_i^*}{2}.$$

Sustituyendo r_i en $V_i = \pi (r_i)^2 \Delta y$, se obtiene:

$$V_i = \pi \left(\frac{12 - y_i^*}{2}\right)^2 \Delta y.$$

Con lo anterior, la masa de la i-ésima capa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad del líquido})\,(\text{volumen de la } i\text{-ésima capa}) \Rightarrow\\ \Rightarrow m_i &= (1\,000)\left[\pi \left(\frac{12 - y_i^*}{2}\right)^2 \Delta y\right] \Rightarrow\\ \Rightarrow m_i &= 250\pi (12 - y_i^*)^2 \Delta y. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F_i &= m_i\, g = \left[250\pi (12 - y_i^*)^2 \Delta y\right] 9.8 \Rightarrow\\ \Rightarrow F_i &= 2\,450\pi (12 - y_i^*)^2 \Delta y. \end{aligned}$$

Con esto:

$$W_i = F_i \cdot y_i^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_i = 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^* \,\Delta y.$$

Al igual que en el problema anterior, el trabajo total W que se requiere para elevar las n capas del líquido, a la parte superior del recipiente, es

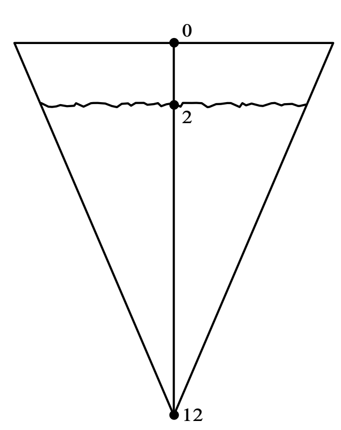
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i y_i^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^* \,\Delta y.$$

Esta aproximación se mejora cuando el número n de capas tiende a ser muy grande, y por lo tanto el grosor Δx tiende a ser muy pequeño; es decir,

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^* \,\Delta y.$$

Y considerando que el lado derecho de esta última expresión es una suma de Riemann, entonces:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^* \,\Delta y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = \int_{2}^{12} 2\,450\pi(12 - y)^2 y \; dy.$$



La solución de esta última integral es

$$\int_{2}^{12} 2\,450\pi(12 - y)^2 y \; dy = 2\,450\pi \int_{2}^{12} (12 - y)^2 y \; dy =$$
$$= 2\,450\pi \int_{2}^{12} (144y - 24y^2 + y^3) \; dy =$$
$$= 2\,450\pi \left[72y^2 - 8y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_2^{12} =$$
$$= 2\,450\pi \left[\left(72(12)^2 - 8(12)^3 + \frac{(12)^4}{4}\right) - \left(72(2)^2 - 8(2)^3 + \frac{(2)^4}{4}\right)\right] =$$
$$= 2\,450\pi[(10\,368 - 13\,824 + 5\,184) - (288 - 64 + 4)] =$$
$$= 11\,545\,353\,\mathrm{J} \approx 11.5454\,\mathrm{M\,J}.$$

Este es el trabajo que se requiere para bombear todo el líquido hasta la parte superior del cono.

□

3.5.4 Trabajo realizado para comprimir o alargar un resorte

Para la ingeniería es importante conocer el trabajo que realiza una fuerza, al comprimir o bien al alargar un resorte.

Resorte con longitud natural

Resorte alargado una longitud x por la acción de una fuerza F

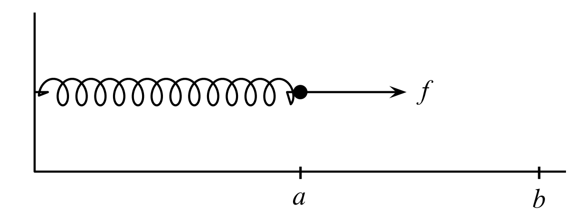
Resorte comprimido una longitud x por la acción de una fuerza F

Si se desea alargar un resorte una longitud x sin llegar a su límite de elasticidad, se debe aplicar una fuerza F directamente proporcional a la longitud x, es decir,

$$F = kx,$$

donde k es la constante del resorte cuyas unidades en el Sistema Internacional (SI) son N/m.
Así también, la fuerza que se requiere para comprimir un resorte es directamente proporcional a la longitud que se comprime o encoge.
Tanto para el alargamiento como para la compresión de un resorte, la expresión $F = kx$ representa la fuerza aplicada. Esta igualdad es conocida como Ley de Hooke.
En cada contexto, dependiendo del sistema de referencia que se escoja, la fuerza F que modifica la longitud natural de un resorte tendrá un sentido positivo o negativo.

Ejemplo 3.5.5 *Un extremo de un resorte se encuentra sujeto a una pared, tal como se muestra en la siguiente figura.*



Se requiere estirar el resorte desde su estado natural cuya longitud es a hasta b, aplicando la fuerza F en el extremo derecho de éste. ¿Cuál es el trabajo W que realiza la fuerza f para el alargamiento del resorte?

▼ Para obtener la expresión que permita calcular el trabajo W que realiza la fuerza f se procede de la siguiente manera:

Se divide el intervalo $[a, b]$ en n-subintervalos, todos ellos con la misma longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Desde luego, considerando que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Δx x
$a = x_0$ x_{i-1} x_i^* x_i x_n

En la recta anterior, x_i^* es un punto cualquiera en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y la fuerza que se requiere para alargar el resorte hasta x_i^* es $f(x_i^*)$.
Los valores de x_{i-1} & x_i se encontrarían muy cerca uno del otro si Δx es muy pequeña. Esto se lograría si el número n de subintervalos tiende a ser muy grande.
En este caso $f(x_i^*)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ no varía mucho y se podría decir que $f(x_i^*)$ es casi constante. Entonces, el trabajo W_i que realiza la fuerza $f(x_i^*)$ para alargar el resorte desde x_{i-1} hasta x_i es, aproximadamente:

$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x.$$

Considerando los n subintervalos en $[a, b]$, el trabajo W que realiza la fuerza f al estirar el resorte desde a hasta b es, aproximadamente:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Si el número de subintervalos n tiende a ser muy grande, entonces:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tal como se ha explicado anteriormente:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

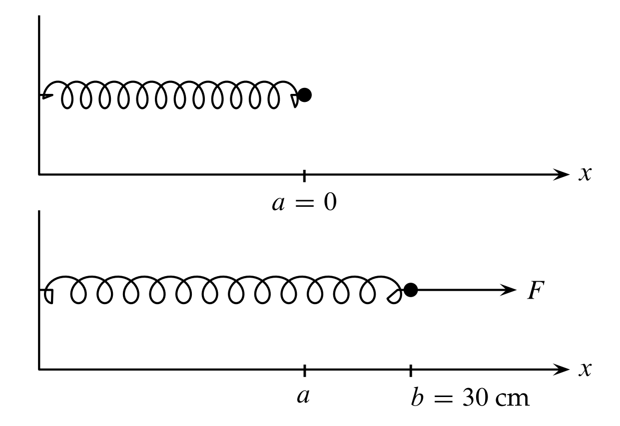
Aquí, $f(x) = kx$, por lo que el trabajo es

$$W = \int_a^b kx\,\mathrm{d}x = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

□

Ejemplo 3.5.6 *Un resorte se encuentra sujeto a una pared por uno de sus extremos. La constante k del resorte es de 8.3 N/cm. ¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza F para alargar el resorte 30 cm?*

▼ Como se puede apreciar en la siguiente figura, la fuerza F alarga el resorte desde $a = 0$ hasta $b = 30$ cm:



El trabajo está dado por la expresión

$$W = \int_a^b kx \, dx.$$

Evaluando la integral:

$$\int_a^b kx \, dx = \int_0^{30} (8.3)x \, dx = (8.3)\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{30} = \left(\frac{8.3}{2}\right)(30^2 - 0^2) =$$
$$= 3\,735 \text{ Ncm} = 37.35 \text{ Nm} = 37.35 \text{ J},$$

que representa el trabajo que realiza la fuerza F para estirar el resorte 30 cm.

□

Ejemplo 3.5.7 *Un resorte con una longiutd natural de 8 cm se encuentra suspendido por uno de sus extremos. Al aplicar una fuerza $F = 45$ N el resorte se alarga 3 cm. ¿Cuál es la energía necesaria (trabajo) para estirar el resorte 3 cm más?*

▼ Se sabe que la fuerza para alargar o bien para comprimir un resorte una longitud x, sin llegar a su límite de elasticidad, es directamente proporcional a dicha longitud. Esto es:

$$F = f(x) = kx,$$

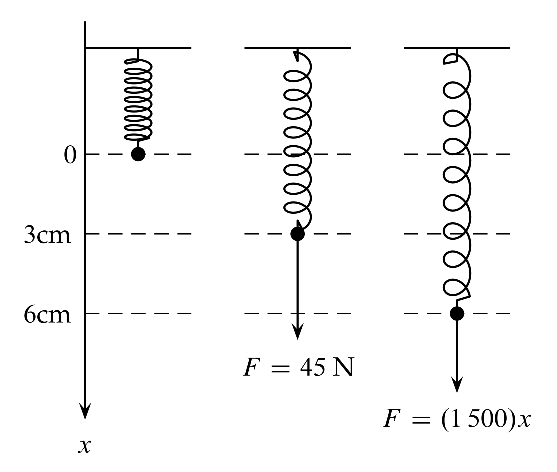
donde k es la constante del resorte. Por la información del problema:

$$F = kx \Rightarrow 45 = k(0.03) \Rightarrow k = \frac{45}{0.03} = 1\,500 \text{ N/m}.$$

Con lo anterior, la fuerza necesaria para estirar el resorte una longitud x es

$$F = f(x) = kx = (1\,500)x.$$

En la siguiente figura se muestra el resorte en tres momentos diferentes: con su longitud natural, estirado 3 cm y estirado 6 cm:



Si el trabajo que realiza una fuerza para estirar el resorte desde a hasta b es

$$\int_a^b (1\,500)x \, dx,$$

entonces:

$$\int_{0.03}^{0.06} (1\,500)(x) \, dx$$

representa la expresión para calcular el trabajo que realiza la fuerza para estirar el resorte desde 3 cm hasta 6 cm, es decir, 3 cm más.
El procedimiento para calcular integral es el siguiente:

$$\int_{0.03}^{0.06} (1\,500)x \, dx = 1\,500 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.03}^{0.06} = \frac{1\,500}{2}[(0.06)^2 - (0.03)^2] =$$
$$= \frac{1\,500}{2}(0.0027) = 2.0250 \text{ J}.$$

□

Ejercicios 3.5.1 *Trabajo.* *Soluciones en la página 14*

1. Una masa de 3.5 kg suspendida de un resorte, lo alarga 4 cm. Si la longitud natural del resorte es de 25 cm, ¿cuál es el trabajo que realiza una fuerza para estirar el resorte 10 cm? y ¿cuál es el trabajo para que el resorte, de su longitud natural de 25 cm llegue hasta 32 cm?

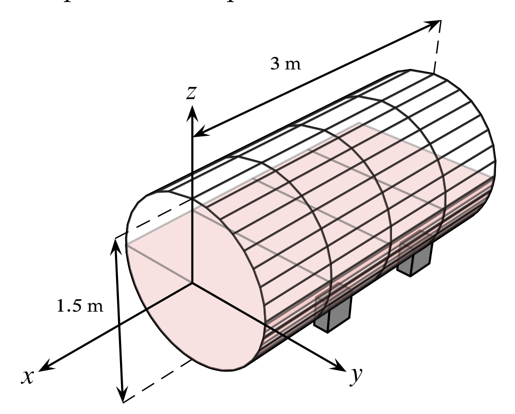
2. Con una fuerza de 30 N, se comprime un resorte 7 cm. ¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza para comprimir el resorte de su longitud natural de 80 cm a una longitud de 70 cm?

3. Cuando se aplica una fuerza de 8 N a un resorte, este se estira 50 cm. ¿Cuál es el trabajo que se realiza para estirar el resorte de su longitud natural de 3 m hasta 3.5 m? ¿Cuál es el trabajo de una fuerza que comprima el resorte 50 cm? Compare las respuestas.

4. La base circular de un recipiente cilíndrico tiene un radio de 75 cm. La altura del recipiente es de 2 m y este se encuentra lleno de agua. ¿Cuál es el trabajo para bombear el agua hasta una altura de 5 m con respecto a la base del recipiente?

5. Un cono circular recto invertido tiene 2 m de altura y en la parte superior el diámetro es de 1.5 m. Si el cono contiene agua y la altura de la superficie del líquido es de 1.8 m, ¿cuál es el trabajo para bombear el líquido hasta la parte superior del recipiente?

6. El recipiente que se muestra en la figura con forma de cilindro recto tiene 3 m de largo y 1.5 m de altura. Si la mitad del recipiente está lleno de agua, ¿cuál es el trabajo que realiza la fuerza para bombear el agua a la parte superior del recipiente?



7. Una cadena de 10 m de longitud pesa 20 kg/m y está extendida en el suelo. Calcular el trabajo que se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 10 m y quedar así totalmente extendida en el aire.

8. Una alpinista tiene que jalar 20 kg de equipaje que cuelgan verticalmente de una soga de 20 m, la cual pesa 0.2 kg/m. Calcular el trabajo que realizará la alpinista para subir el equipaje.

9. Un contenedor esférico, cuyo radio tiene una longitud de 2 m, contiene agua de mar cuya densidad media aproximada es de 1 027 kg/m^3. Si la altura del nivel del líquido es de 3.5 m, ¿cuál es el trabajo para bombear el agua hasta la parte superior del tanque?

10. Un tanque con la forma de un paraboloide de revolución tiene 10 ft de altura y 4 ft de radio en la parte superior. Suponiendo que dicho tanque está lleno de aceite de oliva que pesa 57 lb/ft^3, calcular el trabajo que se requiere para bombear todo el aceite a la parte superior del contenedor y así vaciarlo por completo.

Ejercicios 3.5.1 *Trabajo.* *Preguntas, página* 12

1. 4.2919 J; 2.1030 J.
2. 0.0214 J.
3. 2 J; 2 J.
4. 138.69 kJ.
5. 5.4764 kJ.
6. 827.719 J.
7. 1 000 J.
8. 4.312 kJ.
9. 670.444 kJ.
10. $3\,400\pi$ lb·ft.

CAPÍTULO

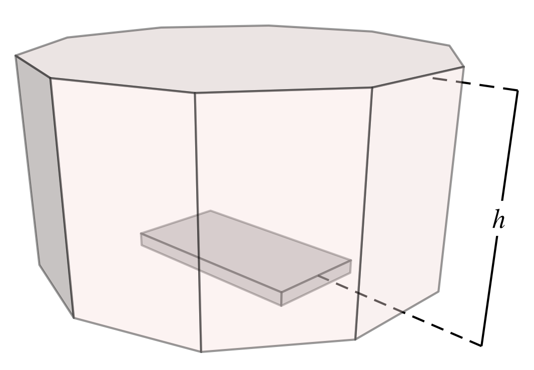
3

Aplicaciones

[1]

3.6 Fuerza y presión de un fluido

Cuando en un fluido contenido por un recipiente se encuentra un cuerpo sumergido, este experimenta una fuerza, perpendicular a cualquiera de sus superficies, ejercida por el fluido.
En la siguiente figura se muestra una placa rectangular que se encuentra en el fondo de un recipiente con agua.



Considerar que el fluido y la placa rectangular se encuentran en reposo. Además, h es la distancia entre la parte superior de la placa y el nivel del fluido y el fluido tiene una densidad ρ (kilogramos por metros cúbicos). El área de la superficie superior de la placa es A (metros cuadrados).
La fuerza F que ejerce el fluido sobre la superficie superior de la placa es

$$F = mg, \tag{3.1}$$

donde m es la masa del fluido que está por arriba de dicha superficie y g es la aceleración debido a la gravedad.
La masa m y el volumen V del fluido que está por arriba de la placa, respectivamente son:

$$m = \rho V, \tag{3.2}$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

$$V = Ah. \tag{3.3}$$

Considerando (3.2) y (3.3) en (3.1), obtenemos:

$$F = mg \ \Rightarrow \ F = \rho V g \ \Rightarrow \ F = \rho A h g.$$

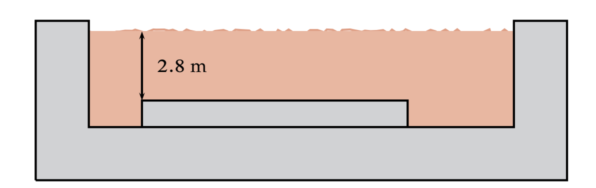
Mientras que $F = \rho A h g$ es la fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie de la placa, la presión P sobre dicha superficie está definida como la fuerza F por unidad de área, es decir:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho h g.$$

En el Sistema Internacional (SI) la unidad que se emplea para medir presión se llama pascal cuya abreviatura es Pa y su equivalencia es

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2.$$

Ejemplo 3.6.1 *Una placa rectangular de* 1 *m de ancho y* 2 *m de largo se encuentra sumergida horizontalmente en el fondo de un contenedor que almacena agua. El lado de la parte superior de la placa se encuentra a* 2.8 *metros del nivel del agua. Encontrar la fuerza y presión del fluido sobre dicho lado. La densidad del agua es* $\rho = 1\,000$ *kg/m*^{3}.



▼ La fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie superior de la placa es

$$F = \rho A h g.$$

En este problema los datos son

$$\begin{aligned} \rho &= 1\,000 \text{ kg/m}^3; \\ h &= 2.8 \text{ m}; \\ g &= 9.8 \text{ m/s}^2; \\ A &= (1 \text{ m})\,(2 \text{ m}) = 2 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Por lo que la fuerza F del fluido sobre el lado de la parte superior de la placa es

$$\begin{aligned} F = \rho A h g &= \left(1\,000 \text{ kg/m}^3\right)(2 \text{ m}^2)(2.8 \text{ m})\left(9.8 \text{ m/s}^2\right) = \\ &= 54\,880 \text{ N}. \end{aligned}$$

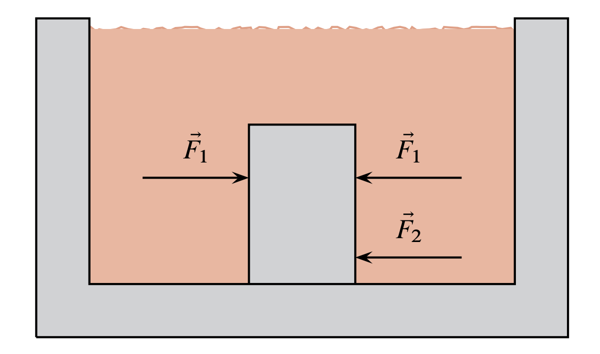
La presión P del fluido sobre dicho lado es

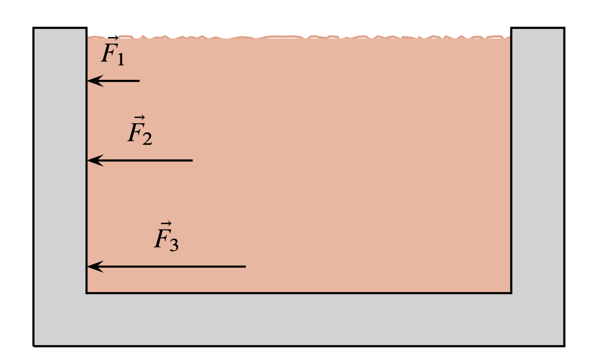
$$P = \frac{F}{A} = \frac{54\,880 \text{ N}}{2 \text{ m}^2} = 27\,440 \text{ N/m}^2 = 27\,440 \text{ Pa} = 27.44 \text{ kPa}.$$

□

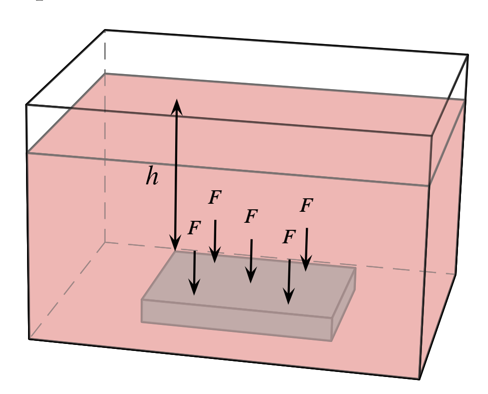
Se ha explicado el cálculo de la fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad constante. Es preciso aquí, efectuar cálculos directos.

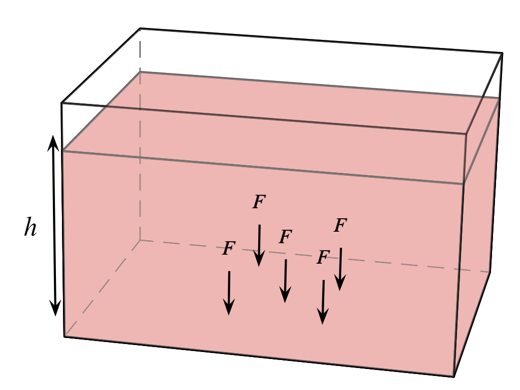
A continuación se explica la manera de calcular la fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad variable. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un fluido sobre un lado vertical de un objeto o sobre una pared vertical del recipiente que lo contiene.



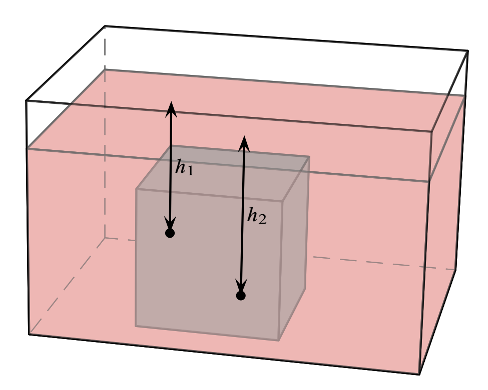


De la expresión para calcular la fuerza de un fluido sobre una superficie $F = \rho Ahg$ se puede apreciar lo siguiente: si toda la superficie de un objeto sumergido en un fluido se encuentra a la misma profundidad sobre el nivel del fluido, la fuerza del fluido sobre todos los puntos de dicha superficie es la misma. Es evidente que se trata de una superficie horizontal y tanto la fuerza como la presión del fluido se pueden calcular con facilidad.
De la misma manera se pueden calcular la fuerza y presión de un fluido sobre el piso o superficie horizontal del recipiente que lo contiene.





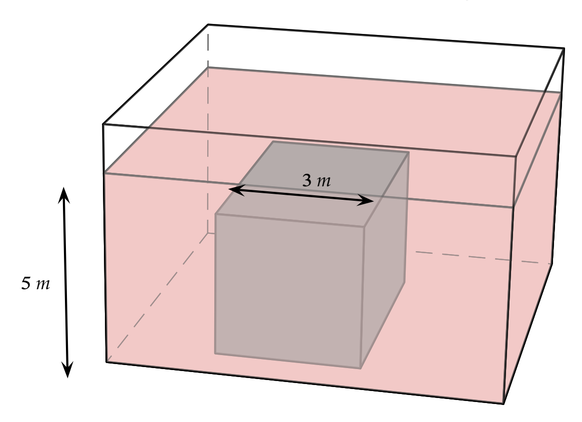
Considerar un poliedro sumergido en el interior de un contenedor lleno de agua, tal y como se muestra en la siguiente figura.



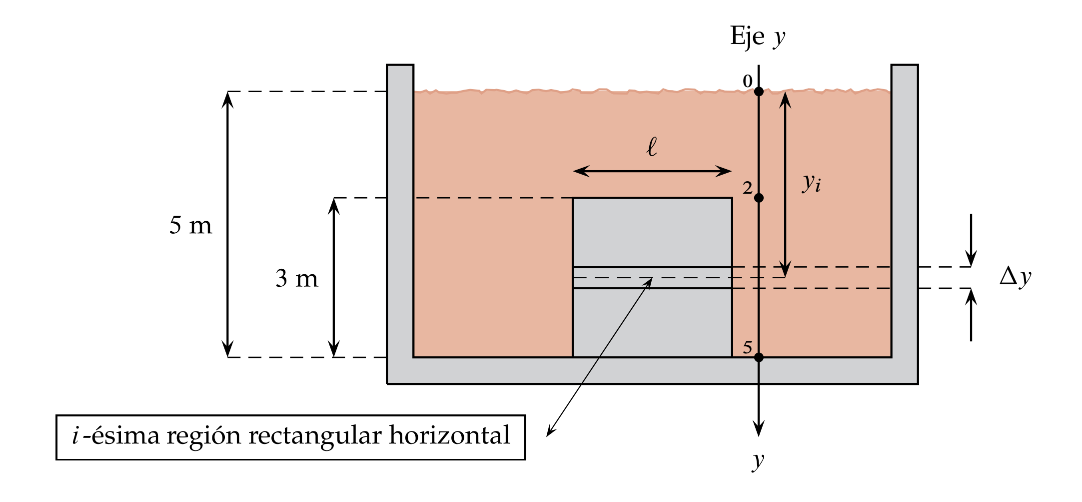
Observe que no todos los puntos sobre las superficies verticales del poliedro se encuentran a la misma profundidad con respecto del nivel del fluido. No en todos los puntos sobre estas superficies se tiene la misma presión P ($P = \rho gh$). En los distintos puntos de la superficie, el fluido va a ejercer fuerzas diferentes.

Para calcular la fuerza total de un fluido sobre una de las superficies verticales del poliedro mostrado, el procedimiento es diferente. Es necesario utilizar los métodos del cálculo. En particular se deben aplicar algunas ideas del cálculo integral.

Ejemplo 3.6.2 *Calcular la fuerza total del fluido (fuerza hidrostática) sobre una de las superficies verticales de un hexaedro regular (cubo), que se encuentra en el fondo de un tanque con agua, como se muestra en la figura. El nivel del agua es de* 5 *m y el lado de las caras del cubo mide* 3 *m. La densidad del agua es* $\rho = 1\,000\ kg/m^3$.



▼ Para este ejercicio se considera como referencia un eje vertical y, cuyo origen se encuentra en la superficie del fluido y con sentido positivo hacia abajo.
Se considera también una i-ésima región rectangular horizontal (una franja) con altura Δy y largo ℓ, sobre una de las superficies verticales del cubo, tal como se muestra en la siguiente figura.



El área A_i de esta i-ésima franja es $A_i = \ell \Delta y$. Observe que si Δy es muy pequeña, entonces la presión P_i sobre dicha i-ésima franja es casi constante y se obtiene con la expresión:

$$P_i \approx \rho g y_i .$$

Por otra parte, la fuerza total F_i del fluido sobre esta franja es, aproximadamente:

$$F_i = P_i A_i \approx \rho g y_i (\Delta y \cdot \ell) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_i \approx \rho g \ell y_i \Delta y.$$

Un conjunto de n franjas cubre la pared vertical del cubo por lo que la fuerza total F del fluido sobre esta superficie vertical es, aproximadamente:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^{n} P_i A_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^{n} \rho g \ell y_i \,\Delta y.$$

En esta última expresión, si el número n de franjas sobre la superficie vertical crece tanto como se quiera, la estimación de la fuerza F será más certera.
Por otra parte, si el número n de franjas tiende a infinito:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g \ell y_i \,\Delta y.$$

Considerando lo presentado en el capítulo 1:

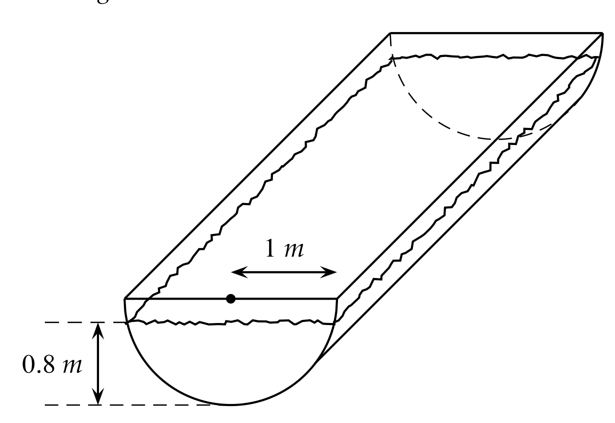
$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g \ell y_i \,\Delta y = \int_a^b \rho g \ell y \, \mathrm{d}y,$$

donde los límites de integración a & b son 2 y 5, respectivamente.
El proceso de la evaluación de la integral y la sustitución de los valores es

$$F = \int_2^5 \rho g \ell y \, \mathrm{d}y = \rho g \ell \int_2^5 y \, \mathrm{d}y = \rho g \ell \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^5 = \rho g \ell \left[\frac{5^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = \left(1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3 \text{ m})\left(\frac{21}{2}\text{ m}^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = 308\,700 \text{ N} = 308.7 \text{ kN}.$$

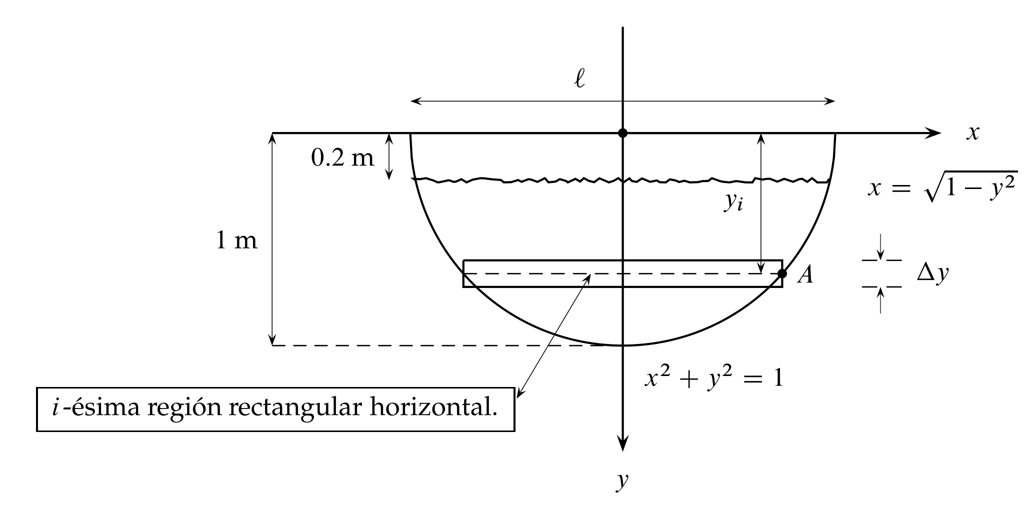
Este valor representa la fuerza hidrostática total sobre una de las paredes verticales del hexaedro regular.
□

Ejemplo 3.6.3 *Las paredes verticales del contenedor que se muestra en la siguiente figura tienen la forma de un semicírculo con un radio de* 1 *m de longitud.*



En el contenedor se encuentra aceite de motor (densidad: 890 *kg/m*^{3}*) cuya altura es de* 80 *cm. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el líquido sobre una de las paredes verticales del contenedor?*

▼ Para este ejercicio se representa una de las paredes verticales del contenedor en el plano cartesiano que se muestra a continuación, donde el eje vertical tiene su origen en la parte superior del recipiente y el sentido positivo hacia abajo.
Observe que parte del contorno de la pared vertical es la curva $x^2 + y^2 = 1$ por lo que la abscisa del punto A mostrado en la figura es $x = \sqrt{1 - y^2}$.



Si Δy de la i-ésima región señalada es muy pequeña, entonces la presión P_i sobre dicha región es casi constante y se obtiene con la expresión

$$P_i = \rho g y_i .$$

La fuerza total F_i del fluido sobre esta región es, aproximadamente:

$$F_i \approx P_i A_i ,$$

donde el área de la i-ésima región A_i es

$$A_i = \ell \Delta y = 2\sqrt{1 - y_i^2}\,\Delta y.$$

Entonces:

$$F_i \approx P_i A_i \approx [\rho g y_i]\left[2\sqrt{1 - y_i^2}\right]\Delta y.$$

Un conjunto de n franjas cubre la pared vertical del contenedor, por lo que la fuerza total F del fluido sobre dicha pared es, aproximadamente:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^{n} P_i A_i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^{n} [\rho g y_i]\left[2\sqrt{1 - y_i^2}\right]\Delta y.$$

Si el número n de franjas tiende a infinito, se tiene una mejor estimación de la fuerza:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g y_i 2\sqrt{1 - y_i^2}\,\Delta y.$$

Además, tal como se ha explicado anteriormente,

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g y_i 2\sqrt{1-y^2}\Delta y = \int_a^b \rho g y 2\sqrt{1-y^2}\, \mathrm{d}y = $$
$$= \rho g \int_a^b 2y\sqrt{1-y^2}\, \mathrm{d}y,$$

donde los límites de integración son $a = 0.2$ m & $b = 1$ m.

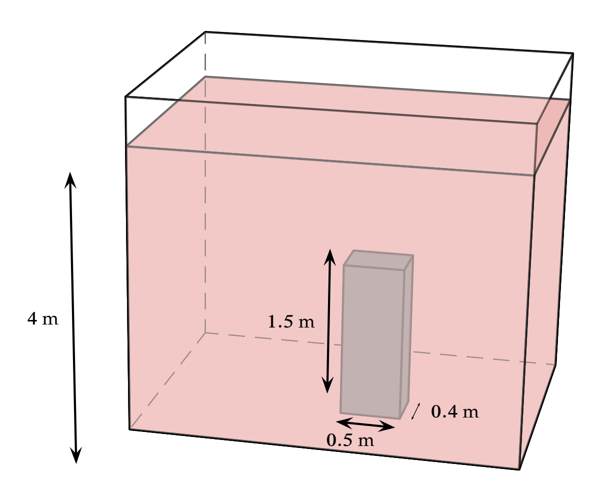
La fuerza F que ejerce el líquido sobre una de las paredes verticales del contenedor es

$$F = \underbrace{\rho g \int_{0.2}^{1} 2y\sqrt{1-y^2}}_{\boxed{u = 1-y^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -2y\,\mathrm{d}y;}} = \rho g \left[-\int_{[1-(0.2)^2]}^{0} u^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}u \right] = \rho g \left[-\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{[1-(0.2)^2]}^{0} \right] =$$
$$= \rho g \frac{2\left[1-(0.2)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{3} = (890)(9.8)\frac{2\left[1-(0.2)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{3} \approx$$
$$= 5.47 \text{ kN}.$$

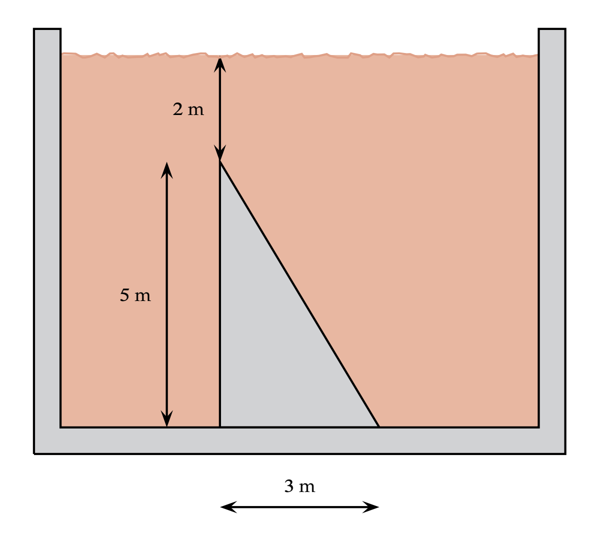
□

Ejercicios 3.6.1 *Presión.* *Soluciones en la página 10*

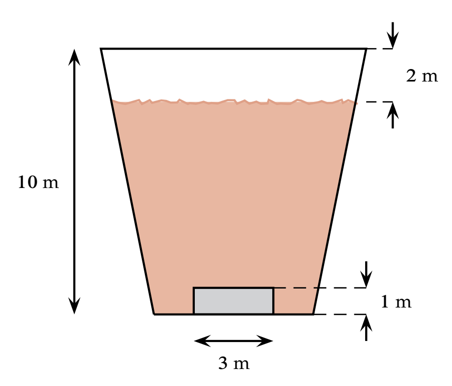
1. Un sólido rectangular, cuyas dimensiones se muestran en la figura, se encuentra sumergido en un recipiente que contiene agua. Determinar la fuerza total del fluido sobre cada una de las superficies verticales del sólido si el nivel del fluido es de 4 m con respecto al fondo del recipiente.



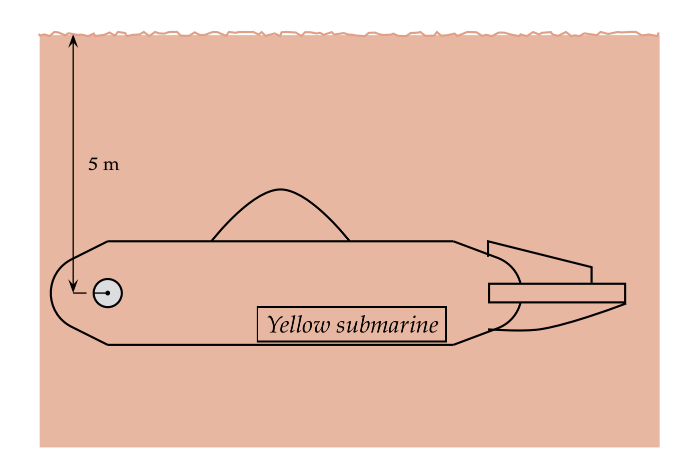
2. Una placa delgada vertical está sumergida en un contenedor con agua como se ve en la siguiente figura. Encontrar la fuerza total del fluido sobre la superficie de la placa.



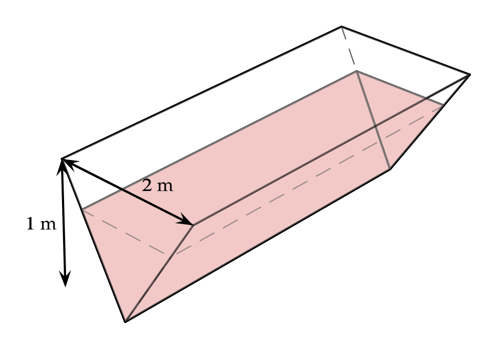
3. ¿Cuál es la fuerza hidrostática que actúa sobre una compuerta rectangular situada en la parte inferior de la cortina vertical de una presa?



4. Una portilla vertical de un submarino es circular con un radio de 40 cm. Si el submarino se encuentra sumergido en agua de mar y la distancia entre el centro de la portilla y el nivel superior del fluido es de 5 m, calcular la fuerza total del fluido sobre la portilla.



5. Tal como se muestra en la figura, las paredes verticales de un tanque que almacena agua tienen la forma de un triángulo equilátero con longitud de 2 m cada lado. Encuentre la fuerza del fluido sobre una de estas superficies cuando la altura del fluido es de 1 m.



Ejercicios 3.6.1 *Presión*. *Preguntas, página 7*

1. 23.89 kN, 19.11 kN.
2. 392 kN.
3. 220.5 kN.
4. 25.37 kN.
5. 60.28 kN.

CAPÍTULO

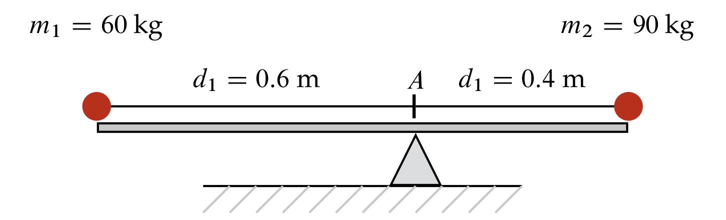
3

Aplicaciones de la integral

3.7 Momentos y centro de una masa [1]

3.7.1 Centro de masa de un sistema unidimensional

Considerar el sistema unidimensional, tal como se muestra en la siguiente figura, formado por una varilla (de masa despreciable) y las masas m_1 & m_2.



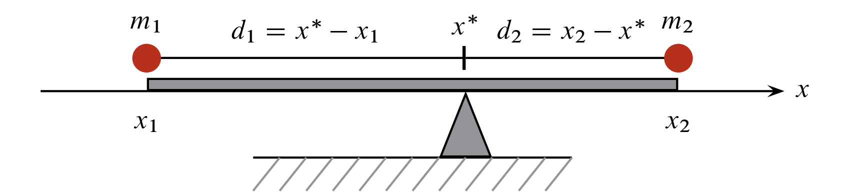
Como se puede apreciar, la varilla tiene una longitud de un metro y se encuentra apoyada en el punto A. En un extremo se encuentra la masa m_1 y en el otro la masa m_2 a una distancia de 0.6 m y 0.4 de A, respectivamente.
La varilla se encuentra en equilibrio lo cual implica que se cumple:

$$(m_1)(d_1) = (m_2)(d_2) \qquad \text{(ley de la Palanca)}$$

Se dice que el punto A sobre la varilla es el centro de masa del sistema unidimensional formado por las masas y la varilla.
Cuando se tiene una masa en cada uno de los extremos de una varilla, ¿cómo se determina el centro de masa del sistema? En otras palabras, ¿dónde debe estar el punto sobre la varilla para que se logre el equilibrio del sistema?

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Considérese el eje horizontal x como eje de referencia y la varilla a lo largo de este, como se muestra en la siguiente figura:



Tal como se indicó anteriormente, para que el sistema en cuestión se encuentre en equilibrio se debe cumplir:

$$(m_1)(d_1) = (m_2)(d_2) \Rightarrow (m_1)(x^* - x_1) = (m_2)(x_2 - x^*).$$

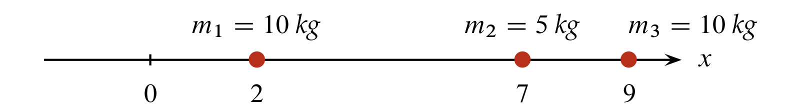
De esta última igualdad se puede despejar x^* que representa el centro de masa del sistema, es decir,

$$m_1x^* - m_1x_1 = m_2x_2 - m_2x^* \Rightarrow m_1x^* + m_2x^* = m_1x_1 + m_2x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Si se tiene un sistema unidimensional formado por las masas m_1, m_2, m_3 ubicadas en x_1, x_2, x_3, respectivamente, la expresión para calcular el centro de masa x^* es la siguiente:

$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Ejemplo 3.7.1 *Encontrar el centro de masa del siguiente sistema.*



▼ En este ejercicio, el centro de masa del sistema formado por las tres particulas se obtiene al utilizar la información conocida en la expresión:

$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Esto es:

$$x^* = \frac{(10)(2) + (5)(7) + (10)(9)}{10 + 5 + 10} = 5.8\,.$$

□

Generalizando, si se tiene un sistema formado por un conjunto de n partículas con masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, ubicadas sobre un eje de referencia x en los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, respectivamente, el centro de masa x^* del sistema se calcula con la expresión:

$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Cada uno de los términos $m_i x_i$ del numerador se conoce como el momento de la masa m_i con respecto del origen. En este sentido el numerador representa la suma de cada uno de los momentos.

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i .$$

A M se suele llamar momento del sistema con respecto del origen.
Por otra parte, el denominador de la expresión representa la masa m total del sistema, esto es:

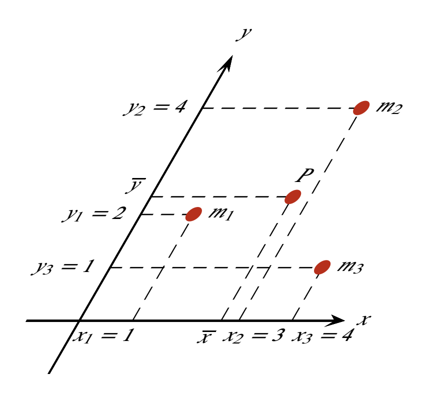
$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Considerando lo anterior:

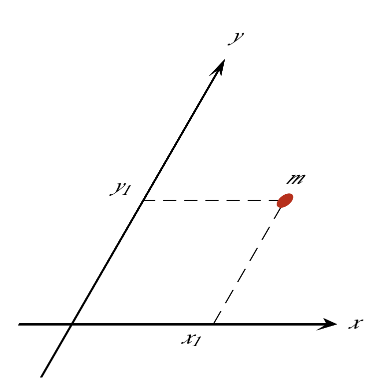
$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M}{m}.$$

3.7.2 Centro de masa de un sistema bidimensional

Considerar las 3 masas, representadas puntualmente en el plano xy, que se muestran en la siguiente figura:



Considere también que $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ kg. En este caso se trata de un sistema bidimensional cuyo centro de masa es el punto P con coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$.
En el caso de un sistema bidimensional, una masa m tiene un momento con respecto a cada eje.



El momento de la masa m con respecto al eje x es

$$M_x = (m)(y_1).$$

El momento de la masa m con respecto al eje y es

$$M_y = (m)(x_1).$$

Para el cálculo de las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa del sistema, se procede de la siguiente manera:

$$\overline{y} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa del sistema}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i};$$

$$\overline{x} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje y}}{\text{masa del sistema}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}.$$

Considerando lo anterior:

$$\overline{y} = \frac{(2)(2) + (2)(4) + (2)(1)}{2 + 2 + 2} = \frac{7}{3} \approx 2.33;$$

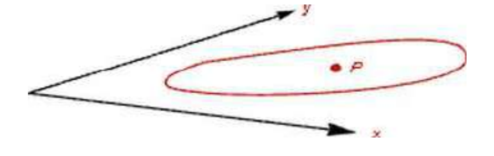
$$\overline{x} = \frac{(2)(1) + (2)(3) + (2)(4)}{2 + 2 + 2} = \frac{8}{3} \approx 2.67.$$

Para un sistema formado por un conjunto de n partículas con masas m_1, m_2, m_3, $\ldots$, m_n ubicadas sobre un plano de referencia xy en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), $\ldots$, (x_n, y_n), respectivamente, el centro de masa del sistema es el punto P sobre el plano con coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$, las cuales se calculan con las siguientes expresiones:

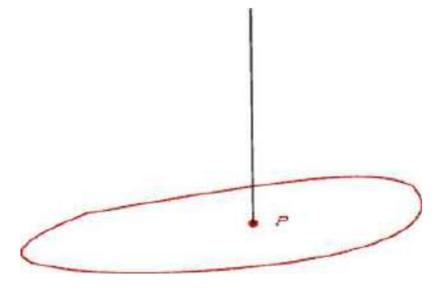
$$\overline{x} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } y}{\text{masa del sistema}} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

$$\overline{y} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa del sistema}} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

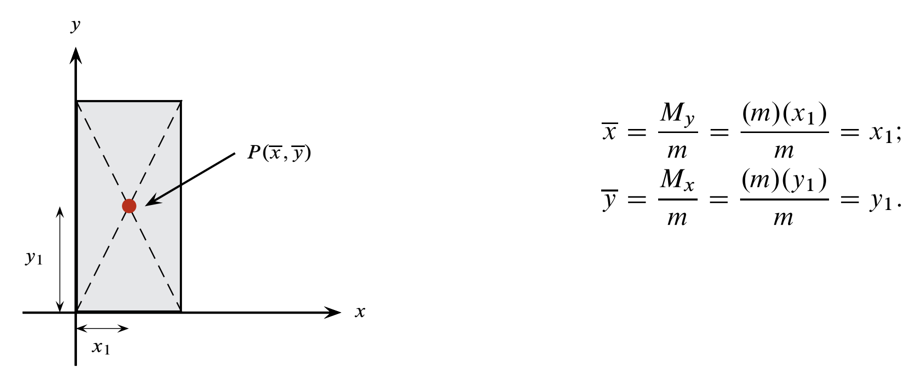
Una lámina plana y delgada como la mostrada en la figura, representa un sistema bidimensional:



El punto P es su centro de masa. Si la lámina está suspendida del punto P, estaría balanceada horizontalmente. En este sentido, se considera que el centro de masa de la lámina es su punto de equilibrio.

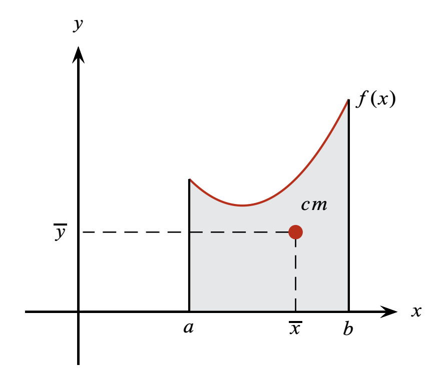


El punto P es donde se concentra la fuerza de gravedad, esto es, la fuerza de atracción que experimentan lo objetos debida a la gravedad. Es por esto por lo que también este punto es llamado centro de gravedad. Una lámina rectangular con masa m y densidad constante tiene su centro de masa en el centro de la figura. Se trata de un sistema bidimensional cuyo centro de masa es el punto P, con coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$.

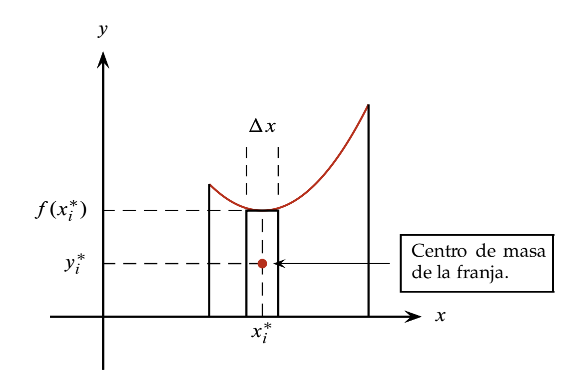


$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(m)(x_1)}{m} = x_1;$$
$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(m)(y_1)}{m} = y_1.$$

A continuación se describe cómo hallar el centro de masa de una placa delgada de forma irregular.
Considerar la placa con densidad constante δ que se muestra a continuación en el plano xy:



Como se puede puede apreciar, la placa está delimitada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y por la gráfica de la función $f(x)$ [continua en (a, b)]. ¿Cómo calcular las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa (cm) de la placa?
Para resolver este problema se divide la superficie de la lámina en n franjas verticales de igual anchura Δx. Observar una de estas franjas mostrada en el siguiente plano:



El centro de masa de la franja vertical, con coordenadas x_i^* & y_i^*, se encuentra en el centro de esta. El ancho de la franja es Δx y su longitud, $f(x_i^*)$. Entonces:

$$\text{Área de la franja:} \qquad \Delta_i A = f(x_i^*)\Delta x;$$
$$\text{Masa de la franja:} \qquad \Delta_i m = \delta \Delta_i A = \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

Para un número n de franjas verticales, la masa M de la placa es

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

Se obtiene una mejor aproximación de M si el número n de franjas tiende a infinito y las Δx tienden a cero. Esto es:

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

Por lo estudiado anteriormente:

$$M = \int_a^b \delta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$x_i^* \Delta_i m = x_i^* \delta f(x_i^*)\Delta x;$$

el momento de la lámina con respecto al eje y es

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^* \delta f(x_i^*)\Delta x.$$

También:

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^* \delta f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b \delta x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

El momento de la franja con respecto al eje x es

$$y_i^* \Delta_i m = \frac{f(x_i^*)}{2}\Delta_i m = \frac{f(x_i^*)}{2}\delta f(x_i^*)\Delta x = \frac{\delta}{2}[f(x_i^*)]^2\Delta x;$$

el momento de la lámina con respecto al eje x es

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2}[f(x_i^*)]^2\Delta x.$$

Como en las explicaciones anteriores:

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2}[f(x_i^*)]^2\Delta x = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

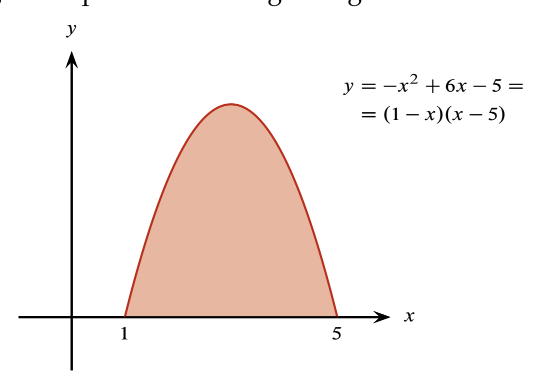
Por último, las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa de la lámina con densidad constante δ son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \delta x f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta f(x)\,\mathrm{d}x};$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{\delta}{2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.7.2 *Determinar el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ, cuya superficie está delimitada por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y el eje x del plano cartesiano ($y = 0$).*

▼ Para resolver este problema, se aplican las expresiones (3.1) obtenidas anteriormente para el cálculo de las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa de un sistema bidimensional.
La región ocupada por la placa delgada se presenta en la figura siguiente:



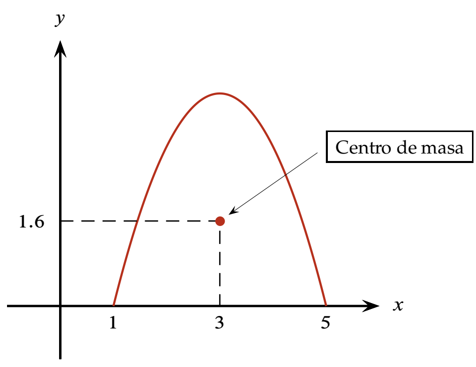
Las coordenadas del centro de masa son:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_1^5 \delta x(-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 \delta(-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x} = \frac{\delta \displaystyle\int_1^5 (-x^3 + 6x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x}{\delta \displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_1^5 (-x^3 + 6x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\left(-\dfrac{x^4}{4} + 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_1^5}{\left(-\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Bigg|_1^5} = \frac{32}{\dfrac{32}{3}} = 3.$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_1^5 \frac{\delta}{2}(-x^2 + 6x - 5)^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 \delta(-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\delta}{2} \displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)^2\,\mathrm{d}x}{\delta \displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x} =$$

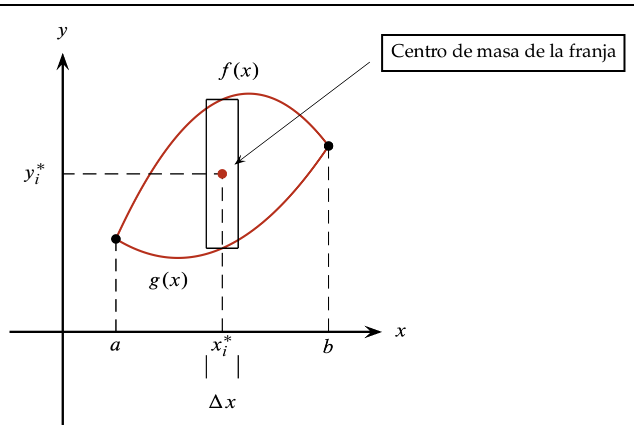
$$= \frac{1}{2}\frac{\dfrac{512}{15}}{\dfrac{32}{3}} = \frac{8}{5} = 1.6.$$



□

3.7.3 Centro de masa de una placa delimitada entre dos curvas

Consideramos que se tiene una placa delgada que ocupa una región en el plano delimitada por la gráfica de dos funciones, tal como se muestra a continuación:



Observamos que el ancho de la franja mostrada es $\Delta_i x$ y su largo es $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Se tiene entonces lo siguiente:

Área de la franja: $\Delta_i A = \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x$;

Masa de la franja: $\Delta_i m = \delta \Delta_i A = \delta \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x$.

Es importante observar:

$$y_i^* = \frac{f(x_i^*) + g(x_i^*)}{2}.$$

Considerando lo anterior, la masa de la placa es

$$M = \int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int_a^b x\,[\delta(f(x) - g(x))]\, \mathrm{d}x = \int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

El momento de la placa con respecto al eje x es

$$M_x = \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right] [\delta(f(x) - g(x))]\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\delta}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right] \mathrm{d}x.$$

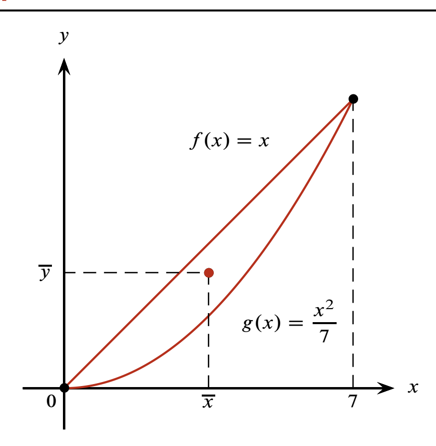
Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x};$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{\delta}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x}.$$

Ejemplo 3.7.3 *Determinar las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa de una lámina plana delgada con la forma de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{7}$.*

▼ La región delimitada por las dos funciones se muestra a continuación.



En este caso $f(x) \geq g(x)$ en $[0, 7]$. Las coordenadas $\overline{x}$ & $\overline{y}$ del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^7 \delta x\left[x - \frac{x^2}{7}\right]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^7 \delta\left[x - \frac{x^2}{7}\right]\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^7 \left[x^2 - \frac{x^3}{7}\right]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^7 \left[x - \frac{x^2}{7}\right]\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{28}\right)\Bigg|_0^7}{\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{21}\right)\Bigg|_0^7} = \frac{\dfrac{343}{12}}{\dfrac{49}{6}} = \frac{343}{98} = 3.5.$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{\delta}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \delta\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_0^7 \frac{\delta}{2}\left[(x)^2 - \left(\frac{x^2}{7}\right)^2\right]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^7 \delta\left[x - \frac{x^2}{7}\right]\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\delta}{2}\displaystyle\int_0^7 \left[x^2 - \frac{x^4}{49}\right]\mathrm{d}x}{\delta\displaystyle\int_0^7 \left[x - \frac{x^2}{7}\right]\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5\cdot 49}\right)\Bigg|_0^7}{\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{21}\right)\Bigg|_0^7} = \frac{\dfrac{343}{15}}{\dfrac{49}{6}} = \frac{343\cdot 6}{49\cdot 15} = 2.8.$$

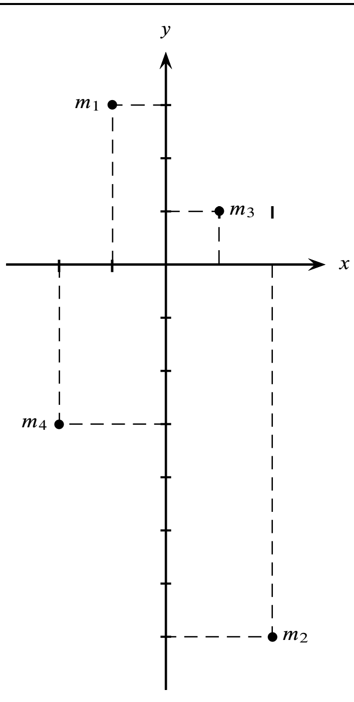
□

Ejercicios 3.7.1 *Momento.* *Soluciones en la página 11*

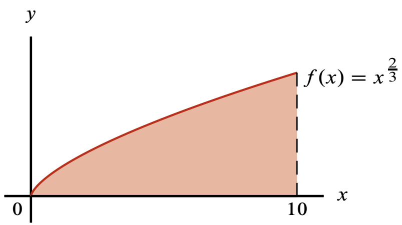
1. Encontrar el centro de masa del sistema formado por tres masas representadas puntualmente sobre la recta ℓ:

$$m_1 = 10\text{ kg en } -5,\quad m_2 = 5\text{ kg en } -1,\quad m_3 = 20\text{ kg en } 3 \quad (\text{recta } \ell;\ \text{marca } 0)$$

2. Encuentre el centro de masa del sistema formado por las masas puntuales $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg, $m_3 = 7$ kg & $m_4 = 5$ kg que se encuentran localizadas en un plano cartesiano, en los puntos $P(-1, 3)$, $P_2(2, -7)$, $P_3(1, 1)$ & $P_4(-2, -3)$, respectivamente.



3. Para la lámina que se muestra en la figura (con densidad constante), determinar las coordenadas de su centro de masa.



4. Determine las coordenadas del centro de la región delimitada por las curvas $y = x, \quad y = x^2 - 6 \quad$ & $x = 0$.

5. Encontrar el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina de densidad uniforme ρ delimitada por las gráficas de $f(x) = x$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

6. Encontrar el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina de densidad uniforme ρ delimitada por las gráficas de $f(x) = x^2$ & $g(x) = \sqrt{x}$.

7. Encontrar el centro de masa de una placa semicircular de radio 5 (placa con densidad ρ uniforme).

8. Para una lámina con densidad constante ρ, acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 1$ & $g(x) = -x^2 + 5x + 1$, encontrar el centro de masa.

9. Considerar una lámina con densidad constante ρ acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = e^x$ & $g(x) = 1$ en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar el centro de masa de la lámina.

10. Encontrar el centro de masa de una lámina (con densidad uniforme) delimitada por la gráfica de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ & $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Ejercicios 3.7.1 *Momento.* *Preguntas, página 9*

1. $x^* = \dfrac{1}{7}$.
2. $\overline{x} = -\dfrac{1}{4}; \overline{y} = -\dfrac{3}{8}$.
3. $\bar{x} = \dfrac{25}{4}; \bar{y} = \dfrac{5\sqrt[3]{5^2}}{7 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$.
4. $\overline{x} \approx 1.17; \overline{y} \approx -1.47$.
5. $\bar{x} = \dfrac{3}{2}; \bar{y} = \dfrac{6}{5}$.
6. $\bar{x} = \dfrac{9}{20}; \bar{y} = \dfrac{9}{20}$.
7. $\bar{x} = 0; \bar{y} = \dfrac{20}{3\pi}$.
8. $\bar{x} = 2.5; \bar{y} = 1$.
9. $\bar{x} = \dfrac{-1 + e^2}{e^2 - 3}; \bar{y} = \dfrac{e^4 - 5}{4\left(e^2 - 3\right)}$.
10. $\bar{x} = \dfrac{\pi\sqrt{2} - 4}{4\left(\sqrt{2} - 1\right)}; \bar{y} = \dfrac{1}{4\left(\sqrt{2} - 1\right)}$.